4. Le groupe $H^2(G;A)$

4.1. On reprend les hypothèses de 3.1. On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi: e(G;A) \to \operatorname{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A).$$

Compte tenu de la définition des groupes $H^*(G;A)$ on obtient alors le résultat classique suivant.

4.2. Théorème. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^2(G;A) = e(G;A).$$

4.3. On va construire l'application Φ.

Soit $[\xi] \in e(G;A)$ représentée par l'extension de groupes

$$\xi: 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1.$$

Notons F le $\mathbf{Z}G$-module libre engendré par l'ensemble $E\backslash\{1\}$; autrement dit $x \in F$ si et seulement si $x = \sum_{e \in E\backslash\{1\}} p_e e$, où $p_e \in \mathbf{Z}G$ et $p_e = 0$ pour presque tous les indices e. On fait la convention que $p_1\, 1 = 0$ dans F.

Soit L le sous-$\mathbf{Z}G$-module de F engendré par les éléments de F de la forme $e_1e_2 - \mu(e_1)\cdot e_2 - e_1$ où $e_1, e_2 \in E$. On notera en particulier que les éléments de la forme $-\mu(e)e^{-1} - e$ et $-\mu(e^{-1})\cdot e - e^{-1}$, où $e \in E$, sont dans L.

On pose $M = F/L$ et on note $\pi: F \to M$ la projection canonique.

4.4. On considère maintenant la suite de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta: 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0.$$

Le morphisme ε est l'augmentation; on va définir les deux autres morphismes.

Pour tout $a \in A$ on pose $\alpha(a) = \pi(\lambda(a))$, mais il faut vérifier que α est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules. Soit $s: G \to E$ une section ensembliste de μ.

Pour tout $g \in G$ et $a \in A$ on a

$$\begin{aligned}\alpha(g\cdot a) - g\cdot\alpha(a) &= \pi\big(s(g)\lambda(a)s(g)^{-1} - g\cdot\lambda(a)\big)\\ &= \pi\big(\big(s(g)\lambda(a)s(g)^{-1} - \mu(s(g)\lambda(a))s(g)^{-1}\\ &\quad - s(g)\lambda(a)\big) + \big(s(g)\lambda(a) - \mu(s(g))\lambda(a) - s(g)\big) - \big(-\mu(s(g))s(g)^{-1} - s(g)\big)\big) = 0.\end{aligned}$$

Enfin on définit un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar\beta: F \to \mathbf{Z}G$ en posant $\bar\beta(e) = \mu(e) - 1$ pour tout $e \in E$ puis en étendant $\mathbf{Z}G$-linéairement cette application. On vérifie immédiatement que $\bar{\beta}(L) = 0$. On définit alors β par la condition $\beta\pi = \bar{\beta}$.

4.5. LEMME. *La suite* η *est exacte.*

Démonstration. On vérifie immédiatement que $\beta\alpha = 0$ et $\varepsilon\beta = 0$. On peut donc considérer η comme un complexe de $\mathbf{Z}G$-modules et pour démontrer son exactitude il suffit de construire une homotopie contractante

$$0 \to A \underset{\underset{\sigma_2}{\leftarrow}}{\overset{\alpha}{\to}} M \underset{\underset{\sigma_1}{\leftarrow}}{\overset{\beta}{\to}} \mathbf{Z}G \underset{\underset{\sigma_0}{\leftarrow}}{\overset{\varepsilon}{\to}} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

On définit σ_0 en posant $\sigma_0(1) = 1$.

Soit $s\colon G \to E$ une section ensembliste de μ telle que $s(1) = 1$; on définit σ_1 en posant $\sigma_1\left[\sum_{g\in G} n_g g\right] = \sum_{g\in G} n_g \pi(s(g))$. Maintenant pour tout $g \in G$ et $e \in E$ on a $\mu(s(g)es(g\mu(e))^{-1}) = 1$; on peut donc définir une application $h\colon G \times E \to A$ en posant

$$\lambda h(g\,; e) = s(g)es(g\mu(e))^{-1}\,.$$

On vérifie immédiatement à partir de cette définition que l'on a

$$h(g\,; e_1e_2) = h(g\mu(e_1)\,; e_2) + h(g\,; e_1)\,. \tag{4.5.1}$$

Comme tout élément $x \in F$ peut s'écrire $x = \sum_{(g\,;\,e)\in Gx(E\setminus\{1\})} n_{g,e}ge$ où $n_{g,e} \in \mathbf{Z}$ et $n_{g,e} = 0$ pour presque tous les indices $(g\,; e)$, on définit une application $\sigma\colon F \to A$ en posant $\sigma(x) = \sum_{(g\,;\,e)} n_{g,e}h(g\,; e)$.

De la relation (4.5.1) on déduit que $\sigma(L) = 0$; on peut donc définir σ_2 par la condition $\sigma_2\pi = \sigma$.

On vérifie sans peine que $\varepsilon\sigma_0 = 1_{\mathbf{Z}}$ et $\sigma_0\varepsilon + \beta\sigma_1 = 1_{\mathbf{Z}G}$.

Pour vérifier que $\sigma_1\beta + \alpha\sigma_2 = 1_M$ il suffit de vérifier que pour tout $g \in G$ et $e \in E\setminus\{1\}$ on a $(\sigma_1\beta+\alpha\sigma_2)\pi(ge) = \pi(ge)$. Or on a

$$\begin{aligned}
\sigma_1\beta\pi(ge) + \alpha\sigma_2\pi(ge) &= \sigma_1\bar{\beta}(ge)+\alpha h(g\,; e)\\
&= \sigma_1(g\bar{\beta}(e))+\pi\lambda h(g\,; e)\\
&= \sigma_1(g\mu(e)-g)+\pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1})\\
&= \pi(s(g\mu(e))-\pi(s(g))+\pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1})\\
&= \pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1}+s(g\mu(e))-s(g)-ge)+\pi(ge)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi\big((s(g)es(g\mu(e))^{-1} - \mu(s(g)e)s(g\mu(e))^{-1} - s(g)e\big) \\
&\quad + \big(s(g)e - \mu(s(g))e - s(g)\big) - \big(-\mu(s(g\mu(e))s(g\mu(e))^{-1} \\
&\quad - s(g\mu(e)))\big) + \pi(ge) \\
&= \pi(ge)\,.
\end{aligned}$$

Finalement pour vérifier que $\sigma_2\alpha = 1_A$ il suffit de se rappeler que $s(1) = 1$.

4.6. Supposons que l'extension de groupes

$$\xi' : 0 \to A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} G \to 1$$

est un autre représentant de $[\xi]$ et soit

$$\eta' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules qui lui est associée.

4.7. LEMME. *Les extensions* η *et* η' *sont équivalentes.*

Démonstration. Par hypothèse il existe un morphisme de groupes $\gamma : E \to E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1 \\
 & & {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & {\scriptstyle \gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_G} & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow[\lambda']{} & E' & \xrightarrow[\mu']{} & G & \to & 1
\end{array}$$

soit commutatif.

Il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi : M \to M'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & {\scriptstyle 1_{\mathbf{Z}G}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\mathbf{Z}}} & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha']{} & M' & \xrightarrow[\beta']{} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow[\varepsilon]{} & \mathbf{Z} & \to & 0
\end{array}$$

soit commutatif.

On peut étendre l'application $\gamma : E \to E'$ en un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar{\gamma} : F \to F'$ et comme on a $\bar{\gamma}(L) \subset L'$, on définit φ par la condition $\varphi\pi = \pi'\bar{\gamma}$. On vérifie immédiatement que $\varphi\alpha = \alpha'$ et $\beta'\varphi = \beta$.

4.8. L'application Φ est alors donnée en posant $\Phi([\xi]) = [\eta]$.

4.9. On construit maintenant une application

$$\Psi : \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,; A) \to e(G\,; A)\,.$$

Soit $[\eta] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}; A)$ représentée par une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z} \to 0 .$$

Choisissons un élément $n \in N$ tel que $\gamma(n) = 1$ et une section ensembliste $\sigma : \mathrm{Im}\,\beta \to M$ de β. La dérivation $d_n \in \mathrm{Int}\,(G; N)$ vérifie la condition $\gamma d_n = 0$. On peut donc définir une application $u : G \to M$ en posant $u = \sigma d_n$; autrement dit pour tout $g \in G$ on a $\beta u(g) = g \cdot n - n$.

L'application u n'est pas une dérivation, cependant pour tous $g_1, g_2 \in G$ on a $g_1 \cdot u(g_2) + u(g_1) - u(g_1 g_2) \in \mathrm{Ker}\,\beta$. On définit alors une application $f : G \times G \to A$ en posant $\alpha f(g_1; g_2) = g_1 \cdot u(g_2) + u(g_1) - u(g_1 g_2)$.

Finalement considérons l'ensemble $E = A \times G$ muni de la loi de multiplication donnée par

$$(a_1; g_1)(a_2; g_2) = \big(a_1 + g_1 \cdot a_2 + f(g_1; g_2); g_1 g_2\big) .$$

4.10. LEMME. *E est un groupe.*

Démonstration. On a $\beta u(1) = 0$; donc il existe un unique élément $e \in A$ tel que $\alpha(e) = -u(1)$. On vérifie facilement que l'élément $(e; 1) \in E$ est neutre en remarquant que pour tout $g \in G$ on a $g \cdot e + f(g; 1) = 0$ et $e + f(1; g) = 0$.

Maintenant pour tout $g \in G$ on a $\beta\big(g \cdot u(g^{-1}) + u(g)\big) = 0$; on peut donc définir une application $h : G \to A$ en posant

$$\alpha h(g) = g \cdot u(g^{-1}) + u(g) .$$

On vérifie cette fois que l'élément $\big(-g^{-1} \cdot a - g^{-1} \cdot h(g); g^{-1}\big) \in E$ est l'inverse de l'élément $(a; g) \in E$ en remarquant que pour tout $g \in G$ on a $f(g; g^{-1}) - h(g) = e$ et $f(g^{-1}; g) - g^{-1} \cdot h(g) = e$.

Enfin pour vérifier l'associativité de la loi de multiplication, il suffit de remarquer que pour tous $g_1, g_2, g_3 \in G$ on a

$$f(g_1; g_2) + f(g_1 g_2; g_3) - g_1 \cdot f(g_2; g_3) - f(g_1; g_2 g_3) = 0 .$$

4.11. Considérons la suite de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1 .$$

Puisque $e + f(1; 1) = 0$, l'application λ définie en posant $\lambda(a) = (a + e; 1)$ est un morphisme de groupes. D'autre part il est immédiat que l'application μ, définie en posant $\mu(a; g) = g$, est un morphisme de groupes.

4.12. LEMME. *ξ est une extension de groupes telle que l'action de G sur A induite par l'extension est égale à l'action donnée de G sur A.*

Démonstration. Il est immédiat que la suite est exacte.
L'action de G sur A induite par l'extension est donnée par

$$\begin{aligned}\lambda(\theta(g)(a)) &= (0;g)\lambda(a)(0;g)^{-1}\\ &= \big(g\cdot a+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1});gg^{-1}\big)\\ &= \big(g\cdot a+e-e+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1});1\big)\\ &= (g\cdot a+e;1)\\ &= \lambda(g\cdot a)\end{aligned}$$

car $-e+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1})=0$ pour tout $g\in G$.

4.13. On notera avec un $'$ les différents éléments de la construction précédente obtenus à partir du choix d'un élément $n'\in N$ tel que $\gamma(n')=1$ et d'une section ensembliste $\sigma'\colon \operatorname{Im}\beta\to M$ de β.

4.14. LEMME. *Les extensions ξ et ξ' sont équivalentes.*

Démonstration. Il faut construire un morphisme de groupes $\delta\colon E\to E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1\\ & & {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_G} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\lambda']{} & E' & \xrightarrow[\mu']{} & G & \to & 1\end{array}$$

soit commutatif.

Comme on a $\gamma(n-n')=0$ on peut trouver un élément $m\in M$ tel que $\beta(m)=n-n'$.

Maintenant pour tout $g\in G$ on a $\beta\big(u(g)-u'(g)-g\cdot m+m\big)=0$; on peut donc définir une application $k\colon G\to A$ en posant

$$\alpha k(g) = u(g)-u'(g)-g\cdot m+m\,.$$

Par calcul direct on vérifie que pour tout $g_1, g_2\in G$ on a

$$(f-f')(g_1;g_2) = g_1\cdot k(g_2)+k(g_1)-k(g_1g_2)\,. \tag{4.14.1}$$

On définit alors δ en posant

$$\delta(a;g) = \big(a+k(g);g\big)$$

et en utilisant la relation (4.14.1) on voit que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda = \lambda'$ car $e' = e + k(1)$; enfin il est immédiat que $\mu'\delta = \mu$.

4.15. On notera maintenant avec une — les différents éléments de la construction précédente obtenus à partir du choix d'une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\bar{\eta}: 0 \to A \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{M} \xrightarrow{\bar{\beta}} \bar{N} \xrightarrow{\bar{\gamma}} \mathbf{Z} \to 0$$

représentant $[\eta]$.

4.16. LEMME. Les extensions ξ et $\bar{\xi}$ sont équivalentes.

Démonstration. Il suffit de vérifier que s'il existe des morphismes de $\mathbf{Z}G$-modules φ et ψ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & N & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\mathbf{Z}}} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\bar{\alpha}]{} & \bar{M} & \xrightarrow[\bar{\beta}]{} & \bar{N} & \xrightarrow[\bar{\gamma}]{} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif, alors il existe un morphisme de groupes $\delta: E \to \bar{E}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1 \\ & & {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_G} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\bar{\lambda}]{} & \bar{E} & \xrightarrow[\bar{\mu}]{} & G & \to & 1 \end{array}$$

soit commutatif.

Comme on a $\bar{\gamma}(\psi(n)-\bar{n}) = 0$ on peut trouver un élément $\bar{m} \in \bar{M}$ tel que $\bar{\beta}(\bar{m}) = \psi(n) - \bar{n}$.

Maintenant pour tout $g \in G$ on a $\bar{\beta}(\varphi u(g) - \bar{u}(g) - g \cdot m + \bar{m}) = 0$; on peut donc définir une application $k: G \to A$ en posant

$$\bar{\alpha}k(g) = \varphi u(g) - \bar{u}(g) - g \cdot \bar{m} + \bar{m}.$$

Par calcul direct on vérifie que pour tout $g_1, g_2 \in G$ on a

$$(4.16.1) \qquad (f - \bar{f})(g_1; g_2) = g_1 \cdot k(g_2) + k(g_1) - k(g_1 g_2).$$

On définit alors δ en posant

$$\delta(a; g) = (a + k(g); g)$$

et en utilisant la relation (4.16.1) on voit que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda = \bar{\lambda}$ car $\bar{e} = e + k(1)$; enfin il est immédiat que $\bar{\mu}\delta = \mu$.

4.17. On peut donc définir l'application Ψ en posant $\Psi([\eta]) = [\xi]$, et il faut vérifier que Ψ est la réciproque de Φ.

4.18. LEMME. $\Psi\Phi = 1_{e(G\,;\,A)}$.

Démonstration. Si $[\xi] \in e(G\,;A)$ est représentée par l'extension de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

alors $\Psi\Phi([\xi]) = \Psi([\eta]) = [\xi']$ où η est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 1$$

définie aux nos 4.3 et 4.4, et ξ' est l'extension de groupes

$$0 \to A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} G \to 1$$

qu'on va obtenir en appliquant la construction des nos 4.9, 4.10 et 4.11.

On peut choisir l'élément $n = 1 \in \mathbf{Z}G$ et définir l'application $u : G \to M$ en composant les applications du diagramme

$$G \xrightarrow{\tau} E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} M\,,$$

où τ est une section ensembliste de μ telle que $\tau(1) = 1$ et i est l'inclusion évidente, car pour tout $g \in G$ on a

$$\beta u(g) = \beta\pi i\tau(g) = \bar{\beta}\tau(g) = \mu\tau(g) - 1 = g - 1\,.$$

L'application $f : G \times G \to A$ qui permet de définir la multiplication du groupe $E' = A \times G$ satisfait donc la condition

$$\alpha f(g_1\,;g_2) = \pi\big(g_1 \cdot \tau(g_2) + \tau(g_1) - \tau(g_1 g_2)\big)\,. \tag{4.18.1}$$

De plus comme $i(1) = 0$ dans F on a $u(1) = 0$ donc $(0\,;1)$ est l'élément neutre de E' et le morphisme λ' est donné par $\lambda'(a) = (a\,;1)$.

Maintenant pour tous $g_1, g_2 \in G$ on a

$$\lambda f(g_1\,;g_2) = \tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1}\,. \tag{4.18.2}$$

En effet comme $\mu\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1}\big) = 1$ on peut définir une application $\bar{f} : G \times G \to A$ en posant $\lambda\bar{f}(g_1\,;g_2) = \tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1}$, et en tenant compte de (4.18.1) et de la définition de α dans 4.4 on a

$$\begin{aligned}
\alpha(\bar{f}(g_1\,;g_2) - f(g_1\,;g_2)) &= \pi\lambda\bar{f}(g_1\,;g_2) - \alpha f(g_1\,;g_2) \\
&= \pi\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1} - g_1\tau(g_2) - \tau(g_1) + \tau(g_1g_2)\big) \\
&= \pi\big((\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1} - \mu(\tau(g_1)\tau(g_2))\tau(g_1g_2)^{-1} - \tau(g_1)\tau(g_2)\big)
\end{aligned}$$

$$+\ \big(\tau(g_1)\tau(g_2)-\mu(\tau(g_1))\tau(g_2)-\tau(g_1)\big)-\big(-\mu(\tau(g_1g_2))\tau(g_1g_2)^{-1}$$
$$-\ \tau(g_1g_2)\big)\big) = 0\,.$$

Finalement pour montrer que les extensions de groupes ξ' et ξ sont équivalentes, il faut construire un morphisme de groupes $\delta : E' \to E$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda'} & E' & \xrightarrow{\mu'} & G & \to & 1 \\ & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\lambda]{} & E & \xrightarrow[\mu]{} & G & \to & 1 \end{array}$$

soit commutatif.

On pose $\delta(a\,;g) = \lambda(a)\tau(g)$.

En utilisant la formule (4.18.2) on vérifie facilement que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda' = \lambda$ car $\tau(1) = 1$ et il est immédiat que $\mu\delta = \mu'$.

4.19. LEMME. $\Phi\Psi = 1_{\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)}$.

Démonstration. Si $[\eta] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ est représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z} \to 0$$

alors $\Phi\Psi([\eta]) = \Phi([\xi]) = [\eta']$ où ξ est l'extension de groupes

$$0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

définie aux n^os 4.9, 4.10 et 4.11 et η' est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

définie aux n^os 4.3 et 4.4.

Pour montrer que les extensions de $\mathbf{Z}G$-modules η' et η sont équivalentes il faut construire des morphismes de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi : M' \to M$ et $\psi : \mathbf{Z}G \to N$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha'} & M' & \xrightarrow{\beta'} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha]{} & M & \xrightarrow[\beta]{} & N & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Soit F' le $\mathbf{Z}G$-module libre engendré par l'ensemble $(A \times G)\backslash\{(e\,;1)\}$ sous-jacent au groupe E et soit $\pi' : F' \to M'$ la projection canonique. Soit encore $u: G \to M$ l'application définie au nº 4.9. En posant $\bar{\varphi}(a\,;g) = \alpha(a)+u(g)$ et en étendant $\mathbf{Z}G$-linéairement cette définition on obtient un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar{\varphi}: F' \to M$ tel que pour tout $(a_1\,;g_1), (a_2\,;g_2) \in E$ on a

$$\bar{\varphi}((a_1\,;g_1)\,(a_2\,;g_2) - \mu(a_1\,;g_1)\cdot(a_2\,;g_2) - (a_1\,;g_1)) = 0$$

Il existe donc un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi: M' \to M$ tel que $\varphi\pi' = \bar{\varphi}$.

Maintenant en posant $\psi(g) = g\cdot n$, où $n \in N$ est l'élément choisi dans la construction de η, et en étendant $\mathbf{Z}$-linéairement cette définition on obtient un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\psi: \mathbf{Z}G \to N$.

On vérifie immédiatement que $\varphi\alpha' = \alpha$, $\beta\varphi = \psi\beta'$ et $\gamma\psi = \varepsilon$.

4.20. Il reste à montrer que l'application Ψ est un morphisme de groupes abéliens.

Soit $[\eta_i] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ $(i=1, 2)$ représentée pour la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta_i: 0 \to A \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} N_i \xrightarrow{\gamma_i} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

On choisit un élément $n_i \in N_i$ tel que $\gamma_i(n_i) = 1$. Si $u_i: G \to M_i$ est donnée par la condition $\beta_i u_i(g) = g\cdot n_i - n_i$, on définit $f_i: G \times G \to A$ par la condition $\alpha_i f_i(g_1\,;g_2) = u_i(g_1) + g_1\cdot u_i(g_2) - u_i(g_1 g_2)$. On pose $E_i = A \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f_i.

Alors à l'extension η_i est associée l'extension de groupes

$$\xi_i: 0 \to A \xrightarrow{\lambda_i} E_i \xrightarrow{\mu_i} G \to 1$$

où $\lambda_i(a) = (a+e_i\,;1)$, avec $\alpha_i(e_i) = -u_i(1)$, et $\mu_i(a\,;g) = g$.

4.21. La somme $[\eta_1] + [\eta_2] = [\nabla(\eta_1\oplus\eta_2)\Delta]$ est définie par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{lccccccccc}
\eta_1\oplus\eta_2 & : 0 \to & A\oplus A & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & M_1\oplus M_2 & \xrightarrow{\bar{\beta}} & N_1\oplus N_2 & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} & \to 0 \\
 & & 1_{A\oplus A}\uparrow & & 1_{M_1\oplus M_2}\uparrow & & \varphi\uparrow & & \uparrow\Delta & \\
(\eta_1\oplus\eta_2)\Delta & : 0 \to & A\oplus A & \xrightarrow[\bar{\alpha}]{} & M_1\oplus M_2 & \xrightarrow[\beta_0]{} & N & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Z} & \to 0 \\
 & & \nabla\downarrow & & \psi\downarrow & & 1_N\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & \\
\nabla(\eta_1\oplus\eta_2)\Delta & : 0 \to & A & \xrightarrow[\alpha]{} & M & \xrightarrow[\beta]{} & N & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Z} & \to 0
\end{array}$$

où $\bar{\alpha} = \alpha_1\oplus\alpha_2$, $\bar{\beta} = \beta_1\oplus\beta_2$, $\bar{\gamma} = \gamma_1\oplus\gamma_2$, N est le produit fibré de $\bar{\gamma}$ et Δ et M est le produit cofibré de $\bar{\alpha}$ et ∇.

4.22. Soit H un groupe. On voit immédiatement que la construction des nos 4.9, 4.10 et 4.11 se généralise en une correspondance entre les 2-extensions d'un $\mathbf{Z}H$-module M par un anneau unitaire commutatif Z sur lequel H agit trivialement, et les extensions de groupes de M par H.

En particulier si on considère $\eta_1 \oplus \eta_2$ comme une 2-extension de $\mathbf{Z}[G \times G]$-modules de $A \oplus A$ par $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, on peut lui associer l'extension de groupes

$$\bar{\xi} : 0 \to A \times A \xrightarrow{\bar{\lambda}} \bar{E} \xrightarrow{\bar{\mu}} G \times G \to 1$$

définie de la façon suivante:

L'élément $\bar{n} = (n_1 ; n_2) \in N_1 \oplus N_2$ satisfait $\bar{\gamma}(\bar{n}) = (1 ; 1)$, donc si on pose $\bar{u} = u_1 \oplus u_2 : G \times G \to M_1 \oplus M_2$ on a $\bar{\beta}\bar{u}(g ; h) = (g ; h) \cdot \bar{n} - \bar{n}$. On peut alors définir $\bar{f} : (G \times G) \times (G \times G) \to A \times A$ par la condition

$$\bar{\alpha}\bar{f}((g_1 ; h_1) ; (g_2 ; h_2)) = \bar{u}(g_1 ; h_1) + (g_1 ; h_1) \cdot \bar{u}(g_2 ; h_2) - \bar{u}(g_1 g_2 ; h_1 h_2) .$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

$$\text{(4.22.1)} \qquad \bar{f}((g_1 ; h_1) ; (g_2 ; h_2)) = (f_1(g_1 ; g_2) ; f_2(h_1 ; h_2)) .$$

On pose $\bar{E} = (A \times A) \times (G \times G)$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par $\bar{f}$.

On a $\bar{\lambda}(a ; b) = ((a ; b) + \bar{e} ; (1 ; 1))$, où $\bar{e} = (e_1 ; e_2)$, et $\bar{\mu}((a ; b) ; (g ; h)) = (g ; h)$.

4.23. Lemme. *Les extensions de groupes $\xi_1 \times \xi_2$ et $\bar{\xi}$ sont équivalentes.*

Démonstration. Compte tenu de la formule (4.22.1) l'application $\delta : \bar{E} \to E_1 \times E_2$, définie en posant

$$\delta((a ; b) ; (g ; h)) = ((a ; g) ; (b ; h)) ,$$

est un morphisme de groupes tel que le diagramme

$$\begin{array}{lccccccccc}
\bar{\xi} & : 0 \to & A \times A & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \bar{E} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & G \times G & \to 1 \\
& & 1_{A \times A} \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_{G \times G} & \\
\xi_1 \times \xi_2 & : 0 \to & A \times A & \xrightarrow[\lambda_1 \times \lambda_2]{} & E_1 \times E_2 & \xrightarrow[\mu_1 \times \mu_2]{} & G \times G & \to 1
\end{array}$$

soit commutatif.

4.24. Maintenant à la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules $(\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta$ on associe l'extension de groupes

$$\xi_0 : 0 \to A \times A \xrightarrow{\lambda_0} E_0 \xrightarrow{\mu_0} G \to 1$$

définie de la façon suivante.

Comme $\bar{\gamma}(\bar{n}) = \Delta(1)$ l'élément $n = (\bar{n}; 1) \in N$ et satisfait $\gamma(n) = 1$; donc si on pose $u_0 = u_1 \oplus u_2 : G \to M_1 \oplus M_2$ on a $\beta_0 u_0(g) = g \cdot n - n$. On peut alors définir $f_0 : G \times G \to A \times A$ par la condition

$$\bar{\alpha} f_0(g_1 ; g_2) = u_0(g_1) + g_1 \cdot u_0(g_2) - u_0(g_1 g_2) .$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

$$f_0(g_1 ; g_2) = \big(f_1(g_1 ; g_2) ; f_2(g_1 ; g_2)\big) . \tag{4.24.1}$$

On pose $E_0 = (A \times A) \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f_0.

On a $\lambda_0(a ; b) = \big((a ; b) + \bar{e} ; 1\big)$ et $\mu_0\big((a ; b) ; g\big) = g$.

4.25. Lemme. *Les extensions de groupes* $\bar{\xi}\Delta$ *et* ξ_0 *sont équivalentes.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bar{\xi} : 0 \arrow[r] & A \times A \arrow[r, "\bar{\lambda}"] & \bar{E} \arrow[r, "\bar{\mu}"] & G \times G \arrow[r] & 1 \\
\bar{\xi}\Delta : 0 \arrow[r] & A \times A \arrow[r, "\bar{\lambda}'"'] \arrow[u, "1_{A \times A}"] & \bar{E}' \arrow[r, "\bar{\mu}'"'] \arrow[u, "\omega"] & G \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"'] & 1
\end{tikzcd}$$

où $\bar{E}'$ est le produit fibré de $\bar{\mu}$ et Δ; donc un élément de $\bar{E}'$ est de la forme $\big((a ; b) ; (g ; g) ; g\big)$.

Compte tenu de la formule (4.24.1) l'application $\delta : \bar{E}' \to E_0$, définie en posant

$$\delta\big((a ; b) ; (g ; g) ; g\big) = \big((a ; b) ; g\big) ,$$

est un morphisme de groupes tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bar{\xi}\Delta : 0 \arrow[r] & A \times A \arrow[r, "\bar{\lambda}'"] \arrow[d, "1_{A \times A}"'] & \bar{E}' \arrow[r, "\bar{\mu}'"] \arrow[d, "\delta"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "1_G"] & 1 \\
\xi_0 : 0 \arrow[r] & A \times A \arrow[r, "\lambda_0"'] & E_0 \arrow[r, "\mu_0"'] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

4.26. Finalement à la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules $\nabla((\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta)$ on associe l'extension de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

définie de la façon suivante.

Si on pose $u = \psi u_0 : G \to M$ on a $\beta u(g) = g \cdot n - n$, donc on peut définir $f : G \times G \to A$ par la condition

$$\alpha f(g_1 ; g_2) = u(g_1) + g_1 \cdot u(g_2) - u(g_1 g_2) .$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

$$f(g_1 ; g_2) = f_1(g_1 ; g_2) + f_2(g_1 ; g_2) . \tag{4.26.1}$$

On pose $E = A \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f.

On a $\lambda(a) = (a + \nabla \bar{e} ; 1)$ et $\mu(a ; g) = g$.

4.27. Lemme. *Les extensions de groupes $\nabla\xi_0$ et ξ sont équivalentes.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\xi_0 : 0 \arrow[r] & A \times A \arrow[r, "\lambda_0"] \arrow[d, "\nabla"] & E_0 \arrow[r, "\mu_0"] \arrow[d, "\omega_0"] & G \arrow[r] \arrow[d, "1_G"] & 1 \\
\nabla\xi_0 : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\lambda'_0"'] & E'_0 \arrow[r, "\mu'_0"'] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

où E'_0 est le produit cofibré de λ_0 et ∇.

Compte tenu de la formule (4.26.1) l'application $\omega : E_0 \to E$, définie en posant $\omega((a ; b) ; g) = (\nabla(a ; b) ; g)$, est un morphisme de groupes tel que $\omega\lambda_0 = \lambda\nabla$ et $\mu\omega = \mu_0$. D'après la propriété universelle du produit cofibré il existe donc un morphisme de groupe $\delta : E'_0 \to E$ tel que $\delta\lambda'_0 = \lambda$ et $\delta\omega_0 = \omega$.

On peut donc considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\nabla\xi_0 : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\lambda'_0"] \arrow[d, "1_A"] & E'_0 \arrow[r, "\mu'_0"] \arrow[d, "\delta"] & G \arrow[r] \arrow[d, "1_G"] & 1 \\
\xi : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\lambda"'] & E \arrow[r, "\mu"'] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

dans lequel le premier carré est commutatif. Le deuxième carré est aussi commutatif car on a $\mu\delta\omega_0 = \mu'_0\omega_0$ et ω_0 est surjectif car ∇ est surjectif.

4.28. La relation d'équivalence entre extensions étant stable vis-à-vis des produits fibrés et cofibrés, les résultats précédents donnent

$$\begin{aligned}\Psi([\eta_1]) + \Psi([\eta_2]) &= [\nabla(\xi_1 \times \xi_2)\Delta] = [\nabla\bar{\xi}\Delta] \\ &= [\nabla\xi_0] = [\xi] = \Psi([\nabla(\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta]) = \Psi([\eta_1]+[\eta_2]).\end{aligned}$$

(Reçu le 8 juillet 1987)

Pierre-Paul Grivel
Université de Genève
Section de mathématiques
Rue du Lièvre 2-4
CH — 1211 Genève 24

vide-leer-empty