§5. Lien entre h(-d) et $h(-df^2)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

$2C$, $3C$, $4C$, $5C$ sont les classes des formes réduites dont les coefficients sont $(9, 7, 11)$, $(9, -7, 11)$, $(3, -1, 29)$ et $(1, 1, 87)$ respectivement.

§ 5. Lien entre $h(-d)$ et $h(-df^2)$ [1]

Soient $-d$ un *discriminant fondamental* (cf. § 3), et f un entier $\geqslant 1$. Les nombres de classes primitives $h(-df^2)$ et $h(-d)$ sont liés par une formule simple. Pour l'établir, nous allons définir un homomorphisme de groupes

$$v : Cl(-df^2) \to Cl(-d) .$$

C'est dans le langage des idéaux fractionnaires que cet homomorphisme se définit le plus aisément : à la classe d'un $\mathcal{O}(-df^2)$-idéal fractionnaire L, v fait correspondre la classe de $\mathcal{O}(-d)L$, qui est un $\mathcal{O}(-d)$-idéal fractionnaire.

Pour tout $x \in \mathcal{O}(-d)$, inversible modulo $f\mathcal{O}(-d)$, le réseau $x\mathcal{O}(-d) \cap \mathcal{O}(-df^2)$ est un $\mathcal{O}(-df^2)$-idéal fractionnaire. L'application qui à x associe la classe de cet idéal définit par passage au quotient un homomorphisme de groupes

$$u : (\mathcal{O}(-d)/f\mathcal{O}(-d))^{\times} \to Cl(-df^2) .$$

On démontre (en utilisant le fait que « la donnée d'un réseau équivaut à celle de ses localisés ») que la suite

$$(\mathcal{O}(-d)/f\mathcal{O}(-d))^{\times} \xrightarrow{u} Cl(-df^2) \xrightarrow{v} Cl(-d) \to 0$$

est exacte, et que le noyau de u est engendré par les classes des entiers relatifs inversibles modulo f et des unités de $\mathcal{O}(-d)$.

Un argument de comptage permet d'en déduire la formule

$$h(-df^2) = h(-d)w^{-1}f \prod_{\substack{p \mid f \\ p \text{ premier}}} (1 - p^{-1}\chi(p))$$

où l'on a posé

$$w = \begin{matrix} 3 & \text{si} & d = 3 & \text{et} & f \geqslant 2 \\ 2 & \text{si} & d = 4 & \text{et} & f \geqslant 2 \\ 1 & \text{sinon ,} & & & \end{matrix}$$

et où χ désigne le caractère de Dirichlet quadratique $n \mapsto \left(\dfrac{-d}{n}\right)$ associé

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 253 à 256.

au corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. On a en particulier si $d > 4$

$$h(-df^2) \geqslant h(-d)\varphi(f) \tag{10}$$

où φ est la fonction d'Euler.

II. Le problème du nombre de classes

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement du nombre de classes lorsque le discriminant tend vers $-\infty$. Compte tenu des formules (8) de I. § 3 et (10) de I. § 5, il est légitime de restreindre notre étude aux discriminants fondamentaux (cf. I. § 3). Dans toute la suite, $-d$ sera un tel discriminant: on aura donc $\tilde{h}(-d) = h(-d)$.

Dans les derniers numéros de son exposé de la classification des formes quadratiques, Gauss émet quelques observations concernant les tables de nombres de classes (il avait constitué lui-même de telles tables, en particulier pour $d \leqslant 3000$); il qualifie de surprenante l'observation suivante [1]: pour chaque entier $h \geqslant 1$, il semble n'y avoir qu'un nombre *fini* de d tels que $h(-d) = h$. Ainsi, pour $h = 1$, ne trouve-t-il dans sa table que les neuf discriminants fondamentaux

$$-3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67, -163$$

(et en outre les quatre discriminants non fondamentaux -12, -16, -27, -28).

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, Heilbronn [2] en 1934 a démontré que, conformément à l'observation de Gauss, on a bien

$$\lim_{d \to \infty} h(-d) = +\infty . \tag{11}$$

Des tables étendues de nombres de classes ont été construites par ordinateur. Buell [3] par exemple a publié les valeurs de $h(-d)$ pour $d \leqslant 4\,000\,000$. Parmi les discriminants fondamentaux satisfaisant à cette inégalité, le nombre de ceux pour lesquels $h(-d)$ est égal à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 est respectivement 9, 18, 16, 54, 25, 51, 31, 131, 34, 87, et

---

1) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 303.

2) H. Heilbronn, *On the class numbers in imaginary quadratic fields*, Quarterly J. of Math. (Oxford), 5 (1934), 150-160.

3) D. A. Buell, *Small class numbers and extreme values of L-functions of quadratic fields*, Math. of Comp. 31 (1977), 786-796.