solution: totalisation dyadique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$t + 0 = \sum_1^\infty x_j \cdot 2^{-j} \quad (x_j = 0 \text{ pour } j \text{ grand})$$

(7)

$$t - 0 = \sum_1^\infty x_j \cdot 2^{-j} \quad (x_j = 1 \text{ pour } j \text{ grand}),$$

les expressions $F'(t)$, $F'(t+0)$, $F'(t-0)$ données par (5) sont les dérivées dyadiques (resp. droite, resp. gauche). Notre problème, un peu plus général que celui de Denjoy, consiste à calculer une fonction F à partir de ses dérivées dyadiques, supposées exister en tout point.

Restreignons F à l'ensemble des nombres dyadiques (les autres n'interviennent pas dans la définition des dérivées dyadiques) et observons que si F a ses dérivées dyadiques partout > 0, F est strictement croissante. C'est un analogue du théorème de Rolle qui s'établit aisément par dichotomie: s'il existait une corde dyadique à pente $\leqslant 0$, il existerait une suite de telles cordes au-dessus d'intervalles dyadiques emboîtés décroissants, donc une dérivée dyadique $\leqslant 0$. La première conséquence est le théorème d'unicité: si $f \equiv 0$, F est une constante, donc $f_n \equiv 0$. Voici une seconde conséquence.

LEMME. *Si* $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$, *on a* $\alpha \leqslant f_n \leqslant \beta$ *pour tout* n.

Preuve. $\alpha \leqslant \dfrac{F(t) - F(s)}{t - s} \leqslant \beta.$

LA SOLUTION: TOTALISATION DYADIQUE

Revenons à X. C'est un espace probabilisé, avec la probabilité naturelle (à savoir l'image réciproque de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ par l'application $x \to t$ vue en (6)). C'est aussi un espace topologique, engendré par les ouverts-fermés

$$C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n) = \{x : x_1 = \varepsilon_1, x_2 = \varepsilon_2, \ldots, x_n = \varepsilon_n\}$$

que nous appelons cellules d'ordre $n (n \in \mathbf{N})$, et il a la propriété de Baire: si X est la limite d'une suite croissante de fermés, ces fermés, à partir d'un certain rang, contiennent une cellule. Comme les f_n sont des fonctions continues, les ensembles

$$E_m = \{x : \sup_{n \geqslant m,\, p \geqslant m} | f_p(x) - f_n(x) | \leqslant 1\}$$

sont des fermés. Comme les f_n convergent en tout point, la réunion des E_m est X. D'après la propriété de Baire, les E_m, à partir d'un certain rang,

contiennent une cellule. En conclusion, il existe des cellules sur lesquelles la fonction f est bornée. Soit C une telle cellule, d'ordre minimum.

Si $C = X$, le lemme montre que les f_n sont bornées. Le théorème de Lebesgue s'applique et donne

$$f_0 = \int_X f_n(x)dx = \int_X f(x)dx = \mathscr{M}_X(f)$$

(dx représente l'élément de mesure de probabilité, et $\mathscr{M}_X$ la moyenne sur X). Le problème est alors résolu. La totalisation s'arrête à la première étape.

En général, la martingale f_n, restreinte à C et à des valeurs de n assez grandes (supérieures à l'ordre de C) définit une nouvelle martingale dyadique, dont la valeur moyenne est

$$f(C) = \mathscr{M}_C(f_n) = \mathscr{M}_C(f) \quad (n \geqslant n(C))$$

($\mathscr{M}_C$ représentant la moyenne sur C et $n(C)$ l'ordre de C), parce que les f_n sont bornées sur C et convergent vers f. Formellement, la martingale dyadique f_n restreinte à $C = C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k)$ est la martingale

$$g_m(y_1, y_2, \ldots y_m) = f_{m+k}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k, y_1, y_2, \ldots y_m) \quad (m \in N, y \in X)$$

et la moyenne sur C est l'intégrale par rapport à dy.

Si $C \neq X$, on répète l'argument ci-dessus en remplaçant X par $X \backslash C$. On obtient une nouvelle cellule d'ordre minimum, C^2, disjointe de C, sur laquelle la fonction f est bornée. Remarquons que $C + C^2 \neq X$ (sinon, l'ordre de C ne serait pas minimal). On peut donc poursuivre: posant $C^1 = C$, on définit une suite infinie de cellules disjointes $C^1, C^2, \ldots, C^k \ldots$ d'ordres croissants (chacune, à son étape, d'ordre minimum) telles que f est bornée sur chaque C^k. Posons $f^0 = f$. Remplaçons f sur C^1 par sa moyenne $f(C^1)$, puis sur C^2 par sa moyenne $f(C^2)$, et ainsi de suite: on obtient une suite $f^1, f^2, \ldots, f^k, \ldots$ telle qu'on passe de f^{k-1} à f^k en prenant pour nouvelle valeur sur C^k la moyenne $f^{k-1}(C^k)$. La k-ième étape de la totalisation consiste précisément à déterminer C^k et à calculer f^k. Remarquons que f^k est la limite de la martingale $f_n^k (n = 0, 1, \ldots)$ obtenue en arrêtant la martingale f_n, sur chaque $C^j (j \leqslant k)$, au temps $n(C^j)$.

Posons maintenant

$$G^\omega = \sum_1^\infty C^k, \qquad f^\omega = \lim_{k \to \infty} f^k.$$

L'étape d'ordre ω (premier ordinal infini) consiste à déterminer G^ω et f^ω.

Remarquons que G^ω est dense dans X, que $G^\omega \neq X$, et que les C^k sont les cellules maximales contenues dans G^ω (il est bon de noter que, si une cellule admet une partition en cellules, cette partition est finie). Posons $K^\omega = X \backslash G^\omega$. Ainsi $f^\omega = f$ sur K^ω.

Remarquons aussi que f^ω est la limite de la martingale dyadique f_n^ω qui s'obtient en remplaçant $f_n(x)$ par $f(C^k)$ quand $x \in C^k$ et $n \geqslant n(C^k)$.

L'étape d'ordre $\omega + 1$ consiste à répéter pour f^ω et K^ω ce que nous avons fait au départ pour f et X. On considère les fermés

$$E_m^\omega = \{x : \sup_{n \geqslant m,\, p \geqslant m} | f_p^\omega(x) - f_n^\omega(x) | \leqslant 1\} .$$

Suivant Baire, il existe un entier m et une cellule C tels que

$$\emptyset \neq C \cap K^\omega \subset E_m^\omega \cap K^\omega .$$

La différence $C \backslash C \cap K^\omega$ est une somme infinie de C^k (les cellules maximales contenues dans $C \cap G^\omega$), disons

$$C \backslash C \cap K^\omega = \sum_{k \in \Lambda} C^k , \qquad \Lambda = \Lambda(C, K^\omega) .$$

Pour chaque $k \in \Lambda$, la cellule mère de C^k (c'est-à-dire d'ordre immédiatement inférieur et contenant C^k) rencontre K^ω; sinon, elle aurait dû être choisie comme $C^j, j \leqslant k$. Désignons par D^k la cellule sœur de C^k; remarquons qu'elle est contenue dans C, donc

$$\emptyset \neq D^k \cap K^\omega \subset E_m^\omega \cap K^\omega .$$

Choisissons $n = n(C^k)$: alors f_n^ω est constant sur C^k (égal à $f(C^k)$), f_n^ω est constant sur D^k, et f_{n-1}^ω est constant sur $C^k + D^k$, égal à la moyenne des deux valeurs précédentes. Si $k \in \Lambda$ et k est assez grand, à savoir $n = n(C_k) > m$, choisissons $x \in D^k \cap K^\omega$. Comme $x \in E_m^\omega$ on a

$$| f_n^\omega(x) - f^\omega(x) | \leqslant 1$$
$$| f_{n-1}^\omega(x) - f^\omega(x) | \leqslant 1$$

et par conséquent

$$| f(C_k) - f^\omega(x) | \leqslant 3 .$$

Or f^ω est borné sur $C \cap K^\omega$. Donc f^ω est uniformément borné sur les $C^k (k \in \Lambda)$. En définitive, f^ω est borné sur C.

On choisit pour $C^{\omega+1}$ une cellule maximale, intersectant K^ω, où f^ω est borné, et on considère la moyenne $f^\omega(C^{\omega+1})$. C'est l'étape d'ordre $\omega + 1$.

Si $C^{\omega+1} = X$, on a terminé. Sinon, on peut poursuivre, et définir une suite de cellules d'ordres croissants $C^{\omega+2}$, $C^{\omega+3}$, $C^{\omega+k}$, ... (chacune, à son étape, étant d'ordre minimum) telles que f^ω est bornée sur chaque $C^{\omega+k}$. On désigne par $f^\omega(C^{\omega+k})$ la valeur moyenne de f^ω sur $C^{\omega+k}$. L'étape d'ordre $\omega + k$ consiste à définir $C^{\omega+k}$ et à calculer $f^\omega(C^{\omega+k})$. Les cellules $C^{\omega+k}(k=0, 1, ...)$ sont disjointes, leur réunion $G^{2\omega}$ est dense dans X et $K^{2\omega} = X\backslash G^{2\omega}$ est un compact non vide. En remplaçant f^ω par $f^\omega(C^{\omega+k})$ sur chaque $C^{\omega+k}$, on obtient une nouvelle fonction $f^{2\omega}$, qui est encore limite de martingale dyadique, transformée de la martingale initiale par un dispositif d'arrêt. C'est l'étape d'ordre 2ω.

L'étape d'ordre $2\omega + 1$ considère $f^{2\omega}$ et $K^{2\omega}$. Si $f^{2\omega}$ est bornée sur $K^{2\omega}$ (c'est-à-dire si f est bornée sur $K^{2\omega}$, puisque $f = f^\omega = f^{2\omega}$ sur $K^{2\omega}$), $f^{2\omega}$ est bornée sur X et son intégration fournit f_0: la totalisation s'arrête à cette étape. Sinon, on va comme ci-dessus jusqu'à l'étape 3ω, où se trouvent définis un compact $K^{3\omega}$ strictement inclus dans $K^{2\omega}$, et une fonction $f^{3\omega}$, limite de martingale dyadique.

Si $f^{3\omega}$ est bornée sur $K^{3\omega}$, elle est bornée partout, son intégration fournit f_0, la totalisation s'arrête à l'étape 3ω. Sinon, elle se poursuit jusqu'à l'étape 4ω, et ainsi de suite.

Si la totalisation ne s'arrête pas avant l'étape ω^2, les compacts K^ω, $K^{2\omega}$, $K^{3\omega}$, ... ont une intersection non vide, K^{ω^2}, et les fonctions f^ω, $f^{2\omega}$, $f^{3\omega}$, ... ont une limite f^{ω^2}, égale à f sur K^{ω^2}, constante sur les cellules maximales contenues dans le complémentaire de K^{ω^2}, et limite d'une martingale transformée par arrêt de la martingale initiale. La totalisation s'arrête à l'étape ω^2 si f est bornée sur K^{ω^2}, et se poursuit sinon jusqu'à l'étape $\omega^2 + \omega$ au moins.

De façon générale, si α est un ordinal limite avant lequel la totalisation se poursuit, K^α est la limite décroissante des K^β, $\beta < \alpha$, et f^α est égale à f sur K^α, et limite de la martingale initiale convenablement arrêtée. La totalisation s'arrête si f est bornée sur K^α, donc f^α bornée partout. Elle se poursuit sinon jusqu'à $\alpha + \omega$ au moins, par le procédé de construction des $K^{\alpha+k}$ et $f^{\alpha+k}$ qui se trouve détaillé plus haut lorsque $\alpha = \omega$.

La chaîne des K^α est strictement décroissante, puisque le passage de K^α à $K^{\alpha+1}$ consiste à supprimer une portion dyadique de K^α (intersection de K^α avec une cellule convenable). Comme il n'y a qu'une infinité dénombrable de cellules, la chaîne s'arrête à un ordinal dénombrable, où la totalisation est achevée.