

§6. Une généralisation du polynôme de Jones-Conway

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **17.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

la classe commune des c_i et P est un polynôme de $k[c] = \mathbb{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]$. Il en résulte que la classe de $t_n(\tau)$ modulo J est représentée par cP' , P' désignant la classe de P dans l'anneau $A = k[c]/_{1+\beta-\alpha c}$. D'après les théorèmes d'Alexander et Markov, le polynôme P' ne dépend que de l'entrelacs $\hat{\tau}$. On a ainsi associé à tout entrelacs orienté E un polynôme $P_E = P'$ de l'anneau A . Cet anneau est en fait le sous-anneau de $k[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}]$ engendré par $\alpha, \beta, \beta^{-1}$ et $(1+\beta)\alpha^{-1}$.

Si x est un croisement d'un entrelacs E dessiné dans le plan, la méthode d'Alexander permet de modifier le dessin de E sans changer le croisement x de façon à obtenir un entrelacs E' isotope à E et de la forme $\hat{\tau}$, où τ est une tresse de B_n . Il en résulte que les trois entrelacs E_+ , E_- et E_0 obtenus par modification de E au voisinage de x sont isotopes à des entrelacs de la forme $\hat{\tau}_+$, $\hat{\tau}_-$ et $\hat{\tau}_0$ où l'on a

$$\tau_+ = \tau' \sigma_i \tau'', \quad \tau_- = \tau' \sigma_i^{-1} \tau'', \quad \tau_0 = \tau' \tau''.$$

On a alors dans l'algèbre H_n l'égalité suivante:

$$\tau_+ - \alpha \tau_0 + \beta \tau_- = 0,$$

ce qui implique

$$P_{E_+} - \alpha P_{E_0} + \beta P_{E_-} = 0.$$

Si E est le nœud trivial il est de la forme $\hat{1}_1$ et la classe de 1_1 dans le quotient de Λ par I_0 est égal à c . On a donc

$$P_E = 1$$

et le théorème 1-7 est alors clair.

§ 6. UNE GÉNÉRALISATION DU POLYNÔME DE JONES-CONWAY

Soit $n > 0$ un entier. Soit L une sous-variété différentiable compacte orientée de dimension 1 de l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ entièrement contenue dans la bande $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$. On suppose que le bord de L est standard. C'est-à-dire qu'il est formé des $2n$ points de coordonnées $(i, j, 0)$ avec $i = 0, 1$ et j variant de 1 à n . On suppose de plus qu'en chacun de ces points, le vecteur tangent à L est vertical descendant, c'est-à-dire à projection nulle sur le plan horizontal $0 \times \mathbb{R}^2$ et à projection négative sur l'axe vertical $\mathbb{R} \times 0$.

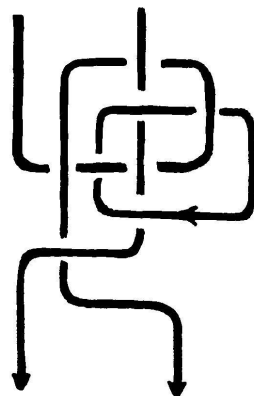
Définition. Une telle variété L sera appelée semi-tresse à n brins. Deux semi-tresses à n brins seront dites isotopes s'il existe une isotopie de la bande $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$ fixe sur le bord qui envoie l'une sur l'autre.

Soient L et L' deux semi-tresses à n brins. En recollant les deux bandes l'une au-dessus de l'autre (celle contenant L étant au-dessus), on obtient une nouvelle semi-tresse. Cette semi-tresse sera appelée produit de L par L' et notée LL' .

PROPOSITION 6-1. *L'ensemble des classes d'isotopie de semi-tresses à n brins est un monoïde unitaire pour le produit. Ce monoïde contient le groupe des tresses B_n comme sous-monoïde. Il sera noté $\hat{B}_n$.*

Remarque. Contrairement au groupe B_n , le monoïde $\hat{B}_n$ est très gros, même pour n petit. Ainsi $\hat{B}_0$ est isomorphe au monoïde des classes d'isotopie d'entrelacs orientés, la loi de composition étant la somme disjointe.

Exemple de semi-tresse à 2 brins :



Comme précédemment, on posera

$$A = k[c]/_{1+\beta-\alpha c} = \mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]/_{1+\beta-\alpha c}.$$

THÉORÈME 6-2. *Il existe pour tout $n > 0$ une unique représentation ρ du monoïde $\hat{B}_n$ dans l'algèbre de Hecke $H_n \otimes_k A$, possédant les propriétés suivantes :*

- ρ étend la représentation canonique de B_n dans H_n ,
- si L_+, L_- et L_0 sont trois semi-tresses à n brins obtenues à partir d'une semi-tresse par modifications au voisinage d'un croisement (avec les mêmes notations que dans le cas des entrelacs), on a

$$\rho(L_+) + \beta\rho(L_-) - \alpha\rho(L_0) = 0.$$

Démonstration. Elle occupera tout le reste du paragraphe.

i) Construction de ρ .

Soit K le corps de fraction de A . Soit ε l'application canonique de H_n dans A , composée de la trace de H_n dans Λ et de l'application quotient de Λ dans A qui envoie chaque classe c_i en c .

LEMME 6-3. L'application qui à u et v de H_n associe $\varepsilon(uv)$ induit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur le K -espace vectoriel $H_n \otimes K$.

Démonstration. Posons, pour tout u et v de H_n , $\langle u, v \rangle$ l'élément $\varepsilon(uv)$ de A . Il est clair que le produit scalaire $\langle, \rangle$ est symétrique. Si l'on quotiente k, A, H_n et Λ par les relations

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1,$$

k devient $\mathbf{Z}$, Λ devient l'anneau $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \dots]$, A devient $\mathbf{Z}[c]$ et H_n devient $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$. Si σ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$, sa classe dans Λ est le monôme $c_1^{p_1} c_2^{p_2} \dots$, où p_i représente le nombre d'orbites de σ à i éléments. En effet, si σ est un cycle d'ordre n , il est conjugué à la permutation $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$ et sa classe dans Λ est c_n . Si σ est formé de cycles d'ordres q_i , σ est conjugué à une permutation $\tau_1 \tau_2 \dots$ où les τ_i sont des cycles d'ordres q_i et sa classe est le produit des classes c_{q_i} .

Il en résulte que la classe de σ dans $\mathbf{Z}[c]$ est égale à c^m , m étant le nombre d'orbites de σ . Et le produit scalaire $\langle \sigma, \tau \rangle$ de deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ est égal à c^m , m étant le nombre d'orbites de $\sigma\tau$. Soit Δ le déterminant de ce produit scalaire calculé dans la base $\mathfrak{S}_n$ de $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$. On a

$$\Delta = \sum_f [f] \prod_{\sigma} c^{m(\sigma f(\sigma))},$$

le produit portant sur toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ et la somme sur toutes les bijections de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même. Le symbole $[f]$ désigne la signature de f et $m(\tau)$ désigne le nombre d'orbites de τ .

Comme $m(\tau)$ est majoré par n , quelle que soit la permutation τ , le degré de Δ est majoré par $nn!$. D'autre part, le coefficient de $c^{nn!}$ dans Δ est la somme des nombres $[f]$, f parcourant l'ensemble des bijections de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même telles que $\sigma f(\sigma)$ ait n orbites quel que soit σ , c'est-à-dire telles que $\sigma f(\sigma)$ soit l'identité quel que soit σ . Cet ensemble de bijections est donc réduit à un élément et le coefficient de $c^{nn!}$ dans Δ est non nul. Il en résulte que Δ est non nul. Or Δ est la classe du déterminant de la forme bilinéaire symétrique $\langle, \rangle$ dans le quotient $\mathbf{Z}[c]$ de A . On en déduit que le produit scalaire $\langle, \rangle$ est non dégénéré dans K .

Soit L une semi-tresse à n brins. Pour toute tresse σ de B_n on peut refermer la semi-tresse $L\sigma$ et l'on obtient un entrelacs orienté E_σ . On notera $F(\sigma)$ le polynôme de Jones-Conway de E_σ .

LEMME 6-4. *L'application F s'étend en une application linéaire, toujours notée F , de l'algèbre H_n dans l'anneau A .*

Démonstration. On étend linéairement F à l'algèbre de groupe $k[B_n]$. Soient σ et τ deux tresses et $i < n$ un entier. D'après les propriétés du polynôme de Jones-Conway, on a

$$F(\sigma\sigma_i^2\tau) - \alpha F(\sigma\sigma_i\tau) + \beta F(\sigma\tau) = 0$$

et F se factorise à travers l'algèbre H_n .

Comme le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénéré sur K , il existe un unique élément U de l'algèbre $H_n \otimes K$ tel que

$$\forall u \in H_n, \quad cF(u) = \langle U, u \rangle$$

et U ne dépend que de la classe d'isotopie de la semi-tresse L ; U sera noté $\rho(L)$.

ii) Propriétés de ρ .

LEMME 6-5. *Si L est une tresse τ , $\rho(\tau)$ est égal à la classe de τ dans H_n .*

Démonstration. Soit σ une tresse. En refermant la tresse $\tau\sigma$ on obtient l'entrelacs E_σ . On en déduit que la classe $\varepsilon(\tau\sigma)$ dans A est égale à cP_{E_σ} et l'on a

$$cF(\sigma) = \langle \tau, \sigma \rangle.$$

Comme ceci a lieu pour toute tresse σ et donc pour tout élément de H_n , $\rho(\tau)$ est égal à la classe de τ dans H_n .

LEMME 6-6. *Si L est une semi-tresse à n brins et σ une tresse de B_n , on a*

$$\rho(L\sigma) = \rho(L)\rho(\sigma).$$

Démonstration. Soit τ une tresse de B_n . Le produit scalaire $\langle \rho(L\sigma), \tau \rangle$ est égal au produit de c par le polynôme de Jones-Conway de l'entrelacs obtenu en fermant $L\sigma\tau$. Il en résulte que $\langle \rho(L\sigma), \tau \rangle$ est égal à $\langle \rho(L), \sigma\tau \rangle$

c'est-à-dire à $\langle \rho(L)\sigma, \tau \rangle$. Comme ceci a lieu pour toute tresse τ , $\rho(L\sigma)$ est égal à $\rho(L)\rho(\sigma)$.

LEMME 6-7. Soient L_+, L_- et L_0 trois semi-tresses obtenues par modification d'une semi-tresse près d'un croisement. Le croisement étant de signe positif pour L_+ et négatif pour L_- et ayant disparu dans L_0 . Alors on a

$$\rho(L_+) + \beta\rho(L_-) - \alpha\rho(L_0) = 0.$$

Démonstration. Soit σ une tresse. Alors les trois entrelacs obtenus en fermant $L_+\sigma, L_-\sigma$ et $L_0\sigma$ sont obtenus d'un entrelacs par modifications au voisinage d'un croisement. D'après les propriétés du polynôme de Jones-Conway, on a

$$\langle \rho(L_+), \sigma \rangle + \beta \langle \rho(L_-), \sigma \rangle - \alpha \langle \rho(L_0), \sigma \rangle = 0$$

et l'on en déduit la formule cherchée.

iii) Unicité de ρ .

Soit L une semi-tresse représentée par une projection régulière sur une bande $[0, 1] \times \mathbf{R}$ du plan. Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les composantes connexes de L qui partent de la partie supérieure de la bande en les numérotant de façon que les points supérieurs des composantes soient placés de la gauche vers la droite. On notera E l'entrelacs formé des composantes fermées de L . On dira que L est ascendante si E est en dessous de chaque C_i et si, en parcourant C_1 puis C_2 et ainsi de suite jusqu'à C_n , chaque fois que l'on croise une portion de courbe déjà vue, on la croise par dessus. Il est clair que si L est ascendante, l'union des C_i est dénouée et L est isotope à la somme disjointe d'une tresse et d'un entrelacs. Si L est une semi-tresse il suffit de modifier les positions dessus-dessous de certains croisements et l'on obtient une semi-tresse ascendante.

LEMME 6-8. Pour toute semi-tresse L à n brins, $\rho(L)$ appartient à $H_n \otimes A$.

LEMME 6-9. Soit ρ' une application de $\hat{B}_n$ dans $H_n \otimes A$ qui vérifie les propriétés du théorème 6-1. Alors pour toute semi-tresse L , $\rho'(L)$ est égal à $\rho(L)$.

LEMME 6-10. Soient L et L' deux semi-tresses à n brins. Alors on a

$$\rho(LL') = \rho(L)\rho(L').$$

Démonstrations. Ces lemmes vont être démontrés par récurrence sur le nombre de croisements de L . Supposons donc que les lemmes sont vérifiés pour toute semi-tresse ayant au plus $m - 1$ croisements. Soit L une semi-tresse ayant m croisements. Si l'on modifie un croisement de L (par modification dessus-dessous) on obtient une nouvelle semi-tresse L_1 . Soit L_0 la semi-tresse obtenue en supprimant le croisement. D'après le lemme 6-7, on a

$$\rho(L) + \beta\rho(L_1) = \alpha\rho(L_0) \quad \text{ou} \quad \beta\rho(L) + \rho(L_1) = \alpha\rho(L_0)$$

suivant le signe du croisement considéré. Comme L_0 a $m - 1$ croisements, $\rho(L_0)$ appartient à $H_n \otimes A$, $\rho'(L_0)$ est égal à $\rho(L_0)$ et $\rho(L_0 L')$ est égal à $\rho(L_0)\rho(L')$. On en déduit que $\rho(L)$ appartient à $H_n \otimes A$ si et seulement si $\rho(L_1)$ appartient à $H_n \otimes A$, que ρ' et ρ sont égaux en L si et seulement si ils sont égaux en L_1 et que $\rho(LL')$ est égal à $\rho(L)\rho(L')$ si et seulement si $\rho(L_1 L')$ est égal à $\rho(L_1)\rho(L')$.

Pour montrer les propriétés cherchées on peut supposer, quitte à modifier les croisements non ascendants de L , que L est ascendant. La semi-tresse L est alors isotope à l'union disjointe d'une tresse τ et d'un entrelacs E .

Soit σ une tresse. L'entrelacs obtenu en fermant $L\sigma$ est l'union disjointe de E et de l'entrelacs obtenu en fermant τ . On a donc

$$\langle \rho(L), \sigma \rangle = \langle \tau, \sigma \rangle cP_E$$

ce qui implique que $\rho(L)$ est égal à $\rho(\tau)cP_E$ et par suite appartient à $H_n \otimes A$.

D'autre part, pour tout entrelacs orienté E' , on peut considérer l'image par ρ' de l'union disjointe de τ et de E' . On construit ainsi un invariant polynomial d'entrelacs qui vérifie les propriétés du polynôme de Jones-Conway, sauf la propriété de valoir 1 sur l'entrelacs trivial. D'après l'unicité du polynôme de Jones-Conway, on a

$$\rho'(\tau \cup E') = \rho(\tau)cP_E.$$

Comme il en est de même pour ρ , ρ et ρ' prennent la même valeur en L .

Enfin, on remarque que LL' est isotope à l'union disjointe de ε et de $\tau L'$. On a donc pour toute tresse σ

$$\langle \rho(LL'), \sigma \rangle = \langle \rho(L'), \sigma\tau \rangle cP_E,$$

ce qui implique

$$\rho(LL') = \rho(\tau)\rho(L')cP_E.$$

Comme ceci a lieu quel que soit L' , on a

$$\rho(L) = \rho(\tau) c P_E$$

et l'on a

$$\rho(LL') = \rho(L)\rho(L').$$

Les lemmes sont alors démontrés, ce qui prouve que ρ est une représentation de $\hat{B}_n$ dans $H_n \otimes A$ qui prolonge la représentation canonique de B_n dans H_n , qu'elle vérifie la formule voulue sur les semi-tresses L_+ , L_- et L_0 , et que c'est la seule représentation vérifiant ces propriétés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALEXANDER, J. W. A lemma on a system of knotted curves. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 9 (1923), 93-95.
- [2] ——— A matrix knot invariant. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 19 (1933), 272-275.
- [3] BIRMAN, J. S. *Braids, links and mapping class group*. Annals of Math. Studies n° 82. Princeton Univ. Press. Princeton, N.J. (1976).
- [4] BIRMAN, J. S. and H. WENZL. Braids, links, polynomials and a new algebra. Preprint 1986.
- [5] BRANDT, R. D., W. B. R. LICKORISH and K. C. MILLETT. A polynomial invariant for unoriented knots and links. *Invent. Math.* 84 (1986), 563-573.
- [6] FREYD, P., D. YETTER, J. HOSTE, W. B. R. LICKORISH, K. C. MILLETT and A. OCNEANU. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. AMS* 12 (1985), 239-246.
- [7] de la HARPE, P., M. KERVAIRE and C. WEBER. On the Jones polynomial. *L'Ens. Math.* 32 (1986), 271-335.
- [8] HOSTE, J. A new polynomial for knots and links. *Pac. J. of Math.* 124 (1986), 295-320.
- [9] JONES, V. F. R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin AMS* 12 (1985), 103-111.
- [10] ——— A new knot polynomial and von Neumann algebras. *Notices AMS* 33 (1986), 219-225.
- [11] ——— Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Annals of Math.* 126 (1987), 389-414.
- [12] KAUFFMAN, L. State models and the Jones polynomial. *Topology* 26 (1987), 395-407.
- [13] ——— An invariant of regular isotopy. Preprint.