

# 9. A PRIORI ESTIMATES OF ORDER FIVE AND MORE

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$S_{4,4}(z_0) \leq c_7,$$

for some controlled constant  $c_7$ , and anywhere else on  $X$ , since  $\theta \leq \theta(z_0)$  and  $\|D\bar{\nabla}\bar{\nabla}\varphi\| \leq C_3$ , one infers that:

$$S_{4,4} \leq c_7 \exp(2\varepsilon C_3).$$

## 9. A PRIORI ESTIMATES OF ORDER FIVE AND MORE

Here, in order to prove 7.1 with  $n \geq 5$ , we consider the functional:

$$S_{n,n} = \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=n-2} \varphi_{a\bar{b}\alpha} \varphi_{\bar{a}b\bar{\alpha}}$$

(the coefficient  $\frac{1}{2}$  appears for both definitions of  $S_{4,4}$  to agree).

Again  $S_{n,n}$  is *coercive* and we compute in a similar way,

$$-\Delta'(S_{n,n}) = T_{n+2,n} + T_{n+1,n+1} \pmod{E_{n-1}},$$

where  $T_{n+1,n+1}$  is *coercive*. As for  $T_{n+2,n}$ , proceeding as in the previous section, we find:

$$T_{n+2,n} = T_{n+1,n} + T_{n,n} + T_n \pmod{E_{n-1}}.$$

Hence,

$$-\Delta'(S_{n,n}) = T_{n+1,n+1} + T_{n+1,n} + T_{n,n} + T_n \pmod{E_{n-1}},$$

with  $T_{n+1,n+1}$  *coercive*. Changing  $n$  into  $(n-1)$ , for  $n \geq 6$ , yields *still modulo*  $E_{n-1}$

$$-\Delta'(S_{n-1,n-1}) = T'_{n,n} + T'_n \pmod{E_{n-1}}.$$

In view of formula (4) of the preceding section, this holds for  $n = 5$  as well. From the *coercivity* of  $T'_{n,n}$  we may choose constants  $c_i > 0$ , such that

$$-\Delta'(S_{n-1,n-1}) \geq c_1 S_{n,n} - c_2 (S_{n,n})^{\frac{1}{2}} - c_3.$$

Moreover we may choose constants  $c_i$  such that

$$|T_{n+1,n}| \leq 2c_4 (T_{n+1,n+1} S_{n,n})^{\frac{1}{2}}, \quad |T_{n,n}| \leq c_5 S_{n,n}, \quad |T_n| \leq c_6 (S_{n,n})^{\frac{1}{2}},$$

and  $c_1 c_7 > c_4^2 + c_5$ .

We obtain,

$$-\Delta'(S_{n,n} + c_7 S_{n-1,n-1}) \geq (c_1 c_7 - c_4^2 - c_5) S_{n,n} - (c_6 + c_2 c_7) (S_{n,n})^{\frac{1}{2}} - c_3 c_7$$

and the proof may be easily completed.

#### 10. THE ANALYTIC POINT OF VIEW

Since equation (1) is *elliptic* and  $g$ , as a Kähler metric, is real analytic for the underlying real (analytic) structure of  $X$ , by the general elliptic regularity theory e.g. [17], p. 266-277 if  $P_\lambda(\varphi)$  is real analytic so are  $\varphi$  and  $g'$ . Hence a purely analytic proof would be desirable.

*Real analytic* inverse function theorems are available since the work of J. Nash [19] who made a decisive use of smoothing operators (see also [13]). A theorem of H. Jaccowitz [15] (p. 203) (see also [25], p. 94-101, 137-138) is available, the proof of which is purely analytical and does not use smoothing operators. This approach was first initiated by A. Kolmogorov (1954) and developed by V. Arnold (1961) (see references in [18]), and by J. Moser [18] (p. 513-533). Unfortunately, the application to nonlinear elliptic operators is not achieved.

A further trouble arises from the fact that the space of analytic functions is *not metrizable*.

Last but not least, we could not carry out analytic *a priori* estimates.

#### REFERENCES

- [1] AUBIN, T. Métriques Riemanniennes et Courbure. *J. Diff. Geom.* 4 (1970), 383-424.
- [2] ——— Equations du type Monge-Ampère sur les Variétés Kählériennes Compactes. *C. R. Acad. Sci. Paris* 283 (1976), 119-121.
- [3] ——— Equations du type Monge-Ampère sur les Variétés Kählériennes Compactes. *Bull. Sc. Math., 2<sup>e</sup> série*, 102 (1978), 63-95.
- [4] ——— *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1982).
- [5] BOURGUIGNON, J. P. Premières formes de Chern des variétés Kählériennes compactes. *Séminaire Bourbaki*, (Nov. 1977), n° 507.