2.2. La contribution de Châtelet [1938] [1941] [1946a] [1947a].

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

on dispose d'une injection

$$E(k)/2E(k) \to (k^*/k^{*2})^2$$
$$(x, y) \mapsto (x-e_1, x-e_2),$$

qui est d'image finie si k est un corps de nombres (théorème de Mordell-Weil faible). Nous verrons au paragraphe 3 comment ceci inspira Châtelet dans un autre contexte.

2.2. La contribution de Châtelet [1938] [1941] [1946*a*] [1947*a*].

La motivation initiale de Châtelet était de déterminer quand une courbe C de genre 1 définie sur un corps k a un point rationnel. Il s'agissait là d'un projet bien ambitieux: à ce jour on ne possède, dans le cas $k = \mathbf{Q}$, d'aucun algorithme sûr pour ce faire. Voici les résultats que Châtelet obtint (le corps k est simplement supposé parfait).

1) *Pour* C *de genre* 1 *définie sur* k, *il existe une courbe elliptique* E *définie sur* k *(i.e.* E *de genre* 1, *et* $E(k) \neq \emptyset$*) et un isomorphisme, défini sur* $\bar{k}$,

$$f : \bar{E} \simeq \bar{C}.$$

2) *A un tel isomorphisme on associe un* 1-*cocycle*

$$a_\sigma = {}^\sigma f \circ f^{-1} \in Z^1(G, \mathrm{Aut}(\bar{E})), \quad où \quad G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k).$$

3) *On dispose d'une suite exacte de G-groupes:*

$$1 \to E(\bar{k}) \to \mathrm{Aut}(\bar{E}) \to F \to 1,$$

où F *est un groupe fini, en général égal à* $\{\pm 1\}$. *Quitte à changer de courbe de référence* E *en* 1), *on peut assurer que* a_σ *vient de* $Z^1(G, E(\bar{k}))$. *Cette condition détermine la courbe elliptique* E *(qui n'est autre alors que la jacobienne de* E*).*

4) *Deux courbes* C *et* D *de genre* 1 *définies sur* k *sont isomorphes sur* k *si et seulement si d'une part elles ont même jacobienne* E, *d'autre part il existe* $b \in E(\bar{k})$ *tel que* $a_\sigma(C) - a_\sigma(D) = {}^\sigma b - b$ *pour tout* $\sigma \in G$.

5) $C(k)$ *est non vide si et seulement si il existe* $b \in E(\bar{k})$ *tel que* $a_\sigma = {}^\sigma b - b$ *pour tout* $\sigma \in G$.

En termes modernes, 3) dit que C est un espace principal homogène sous la courbe elliptique E, et 4) dit que l'ensemble des classes d'isomorphisme d'espaces principaux homogènes sous E se plonge dans le groupe (abélien) de cohomologie $H^1(G, E(\bar{k}))$.

Ce fut Weil qui, en 1955, montra que ce plongement est en fait une bijection, si bien que les classes d'isomorphisme d'espaces principaux homogènes sous E forment un groupe abélien. C'est ce groupe qui fut nommé en 1957 groupe de Weil-Châtelet $\mathrm{WC}(E)$ par Tate, lequel considéra plus généralement le groupe $H^1(G, A(\bar{k}))$ pour A une variété abélienne définie sur k.

Les résultats de Châtelet lui permirent de retrouver des résultats antérieurs de façon entièrement algébrique :

Il établit d'une part ([1939], [1947*c*]) le théorème de F. K. Schmidt (1931) selon lequel toute courbe de genre 1 sur un corps fini F possède un point rationnel en montrant que les groupes $H^1(\mathrm{Gal}(F_r/F), E(F_r))$ et $E(F)/NE(F_r)$, où N est la norme correspondant à l'extension de corps finis F_r/F, ont même cardinal et que le dernier groupe est nul, en utilisant le théorème de Riemann-Roch.

Il retrouva d'autre part ([1949*a*]) les résultats de Klein, Weichold, Witt (1934) sur la classification des courbes de genre 1 sur le corps $\mathbf{R}$: si C et D sont deux courbes de genre 1 sur $\mathbf{R}$ de jacobienne E, elles sont isomorphes à E si $E(\mathbf{R})$ est connexe ; si $E(\mathbf{R})$ est disconnexe et ni C ni D n'ont de point réel, elles sont isomorphes entre elles. Le point ici est l'isomorphisme $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}), E(\mathbf{C})) \simeq E(\mathbf{R})/N_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(E(\mathbf{C})) = 0$ ou $\mathbf{Z}/2$.

Enfin, F. Châtelet a fait quelques pas dans la direction de la suite exacte de cohomologie (dégagée par Lang et Tate en 1958)

$$0 \to E(k)/nE(k) \to H^1(G, {}_nE(\bar{k})) \to {}_nH^1(G, E(\bar{k})) \to 0$$

déduite de la suite de G-modules

$$0 \to {}_nE(\bar{k}) \to E(\bar{k}) \xrightarrow{n} E(\bar{k}) \to 0 .$$

Dans des cas particuliers [1941], il a vu la structure de groupe sur le terme médian $H^1(G, {}_nE(\bar{k}))$, d'où une composition des « n-revêtements ». Mais il semble bien que ce soit Weil qui ait établi la structure de groupe de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'espaces principaux homogènes sous E.

Il est intéressant de noter que dans ses articles, Châtelet insiste sur le fait que son analyse permet de ramener la question de l'existence d'un point rationnel sur C à la connaissance du groupe de Mordell-Weil $E(k)$ de la courbe jacobienne E associée. Si les deux problèmes sont en fait essentiellement équivalents, l'approche cohomologique que F. Châtelet a contribué à introduire a servi de fondement à tous les développements ultérieurs.