

# Berechnung von Verzahnungen mit Profilverschiebung

Autor(en): **Baumgartner, Arthur**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **70 (1952)**

Heft 44

PDF erstellt am: **07.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-59699>

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Berechnung von Verzahnungen mit Profilverschiebung

Von ARTHUR BAUMGARTNER, Masch.-Techniker, Zürich

## Einleitung

DK 621.833

Wer Einblick in die Zahnradherstellung hat, muss feststellen, dass immer noch viele Konstrukteure die Möglichkeiten nicht ausschöpfen, welche die normalen Abwälz-Werkzeuge für die Erzeugung von Evolventen-Verzahnungen bieten. Die Nachteile der Normal-Verzahnung bestehen zur Hauptsache darin, dass für gegebene Zähnezahlen und Moduli die Achsdistancen festgelegt sind, und dass bei kleinen Zähnezahlen die Zahnformen und Eingriffsverhältnisse ungünstig, oft sogar ungenügend werden. Zum Teil werden diese Nachteile unnötigerweise in Kauf genommen, oder es werden Spezial-Werkzeuge ange-

schaft, welche das Lager kostspieliger Verzahnungswerkzeuge unnütz vergrössern.

In nachfolgendem Aufsatz, der sich auf verschiedene Veröffentlichungen und eigene Studien stützt, werden zunächst die grundlegenden Zusammenhänge für Stirnräder in einfacher Weise aufgezeigt und anschliessend eine einwandfreie Methode zur Berechnung von Rädern mit schrägen Zähnen mit parallelen und gekreuzten Achsen gezeigt sowie Angaben für negative Profilverschiebung gemacht. Gerade das letztgenannte Problem ist in der bestehenden Literatur ungenügend behandelt, enthält

Tabelle 1. Korrekturwerte für Evolventenverzahnungen (Eingriffswinkel des Grundwerkzeuges 20°)

$d$	$\frac{x_1 + x_2}{z_m}$	$\alpha'$	$\frac{y}{z_m}$	$d$	$d$	$\frac{x_1 + x_2}{z_m}$	$\alpha'$	$\frac{y}{z_m}$	$d$
66	— 0,02036	16° 00'	— 0,02244	82	145	0,02238	23° 00'	0,02084	127
68	— 0,01970	10'	— 0,02162	83	147	0,02383	10'	0,02211	128
69	— 0,01902	20'	— 0,02079	84	150	0,02530	20'	0,02339	129
71	— 0,01833	30'	— 0,01995	85	153	0,02680	30'	0,02468	130
73	— 0,01762	40'	— 0,01910	86	154	0,02833	40'	0,02598	132
74	— 0,01689	50'	— 0,01824	87	158	0,02987	50'	0,02730	132
75	— 0,01615	17° 00'	— 0,01737	88	159	0,03145	24° 00'	0,02862	134
77	— 0,01540	10'	— 0,01649	89	162	0,03304	10'	0,02996	135
79	— 0,01463	20'	— 0,01560	89	165	0,03466	20'	0,03131	136
80	— 0,01384	30'	— 0,01471	91	167	0,03631	30'	0,03267	138
82	— 0,01304	40'	— 0,01380	92	170	0,03798	40'	0,03405	139
84	— 0,01222	50'	— 0,01288	93	173	0,03968	50'	0,03544	140
85	— 0,01138	18° 00'	— 0,01195	94	175	0,04141	25° 00'	0,03684	141
87	— 0,01053	10'	— 0,01101	95	178	0,04316	10'	0,03825	142
88	— 0,00966	20'	— 0,01006	96	180	0,04494	20'	0,03967	144
91	— 0,00878	30'	— 0,00910	97	183	0,04674	30'	0,04111	145
92	— 0,00787	40'	— 0,00813	98	186	0,04857	40'	0,04256	147
94	— 0,00695	50'	— 0,00715	99	189	0,05043	50'	0,04403	147
95	— 0,00601	19° 00'	— 0,00616	100	191	0,05232	26° 00'	0,04550	150
98	— 0,00506	10'	— 0,00516	101	195	0,05423	10'	0,04700	150
99	— 0,00408	20'	— 0,00415	102	197	0,05618	20'	0,04850	151
101	— 0,00309	30'	— 0,00313	103	200	0,05815	30'	0,05001	153
103	— 0,00208	40'	— 0,00210	105	203	0,06015	40'	0,05154	155
105	— 0,00105	50'	— 0,00105	105	206	0,06218	50'	0,05309	155
107	0,00000	20° 00'	0,00000	106	209	0,06424	27° 00'	0,05464	157
109	0,00107	10'	0,00106	108	212	0,06633	10'	0,05621	159
110	0,00216	20'	0,00214	109	215	0,06845	20'	0,05780	159
113	0,00326	30'	0,00323	109	218	0,07060	30'	0,05939	161
115	0,00439	40'	0,00432	111	221	0,07278	40'	0,06100	163
116	0,00554	50'	0,00543	112	225	0,07499	50'	0,06263	164
119	0,00670	21° 00'	0,00655	113	227	0,07724	28° 00'	0,06427	165
121	0,00789	10'	0,00768	114	231	0,07951	10'	0,06592	167
123	0,00910	20'	0,00882	115	234	0,08182	20'	0,06759	168
125	0,01033	30'	0,00997	116	238	0,08416	30'	0,06927	170
127	0,01158	40'	0,01113	117	240	0,08654	40'	0,07097	171
130	0,01285	50'	0,01230	119	244	0,08894	50'	0,07268	172
131	0,01415	22° 00'	0,01349	120	247	0,09138	29° 00'	0,07440	174
134	0,01546	10'	0,01469	120	251	0,09385	10'	0,07614	176
136	0,01680	20'	0,01589	122	253	0,09636	20'	0,07790	176
138	0,01816	30'	0,01711	124	258	0,09889	30'	0,07966	179
140	0,01954	40'	0,01835	124	261	0,10147	40'	0,08145	180
144	0,02094	50'	0,01959	125	265	0,10408	50'	0,08325	181
	0,02238	23° 00'	0,02084			0,10673	30° 00'	0,08506	

doch beispielsweise DIN Blatt 870 Richtlinien, welche zu unbrauchbaren Getrieben führen können und in allen Publikationen wiederzufinden sind.

Das Verfahren, günstige Zahnformen mit normalen Werkzeugen herzustellen, ist nicht neu. Maag hat wohl als erster die Möglichkeiten systematisch erfasst, hielt aber seine Berechnungs-Unterlagen bis heute geheim. Erstmals dürften die Berechnungsgrundlagen von Fölmer veröffentlicht worden sein. Leider fehlt aber immer noch ein einfaches Berechnungsverfahren, das erlaubt, relativ rasch und vor allem mit der für den heutigen Präzisionsgetriebebau nötigen Genauigkeit die erforderlichen Korrektur- und Messwerte zu bestimmen.

Die Bedingungen, die an eine gute Verzahnung gestellt werden, enthalten oft widersprechende Forderungen: Kräftige, unterschnittfreie Zähne, kleine Zahndrücke, lange Eingriffsdauer, kleine spezifische Gleitung. Um eine gute Verzahnung zu erreichen, ist es also nötig, Kompromisse zu machen. Folgende Bedingungen sollten aber unbedingt eingehalten werden: Vermeidung des Unterschnittes, genügender Ueberdeckungsgrad, richtige Lage der Eingriffs-Strecke auf der Eingriffs-Linie.

Bei der Evolventen-Verzahnung besteht für richtigen Zahn-eingriff nur die Bedingung, dass ein Räderpaar die gleiche Grundkreis- bzw. Eingriffsteilung aufweist; ferner sollen die Aussendurchmesser und die Zahndicken so bemessen sein, dass nach Einbau in eine gegebene Achsdistanz ein zweckmässiges Kopf- und Flankenspiel vorhanden ist. Es ist somit möglich, die Räder mit Werkzeugen herzustellen, welche verschiedene Eingriffswinkel, aber gleiche Eingriffsteilungen besitzen oder, wenn beide Räder mit dem gleichen Werkzeug nach dem Abwälzverfahren hergestellt werden, das Bezugszahnstangenprofil von der normalen Lage abzurücken. In der Praxis ist der zweite Fall von grösster Bedeutung. — Die nachstehenden Ausführungen beziehen sich auf das Modul-System. Die Gleichungen und Tabellen können aber auch auf das Diametral-Pitch-System angewendet werden, wenn in den Gleichungen  $m$  durch den Ausdruck  $1/DP$  ersetzt wird.

## 1. Grundlagen

Bild 1 zeigt, wie das Zahnprofil eines Ritzels durch die Lage des Bezugsprofils beeinflusst werden kann. Der Betrag der Abrückung wird zweckmässig auf den Modul 1 bezogen und mit  $xm$  bezeichnet. Bringt man ein derart hergestelltes Radpaar mit dem Bezugsprofil in Eingriff (Bild 2, Werte wieder auf Modul 1 bezogen), so wird man zwischen den Radflanken ein beträchtliches Spiel feststellen, welches für den praktischen Gebrauch unzulässig ist. Für spielfreien Eingriff darf die Achsdistanz also nicht um den Betrag der Profilverschiebungen  $(x_1 + x_2)m$  verändert werden, sondern nur

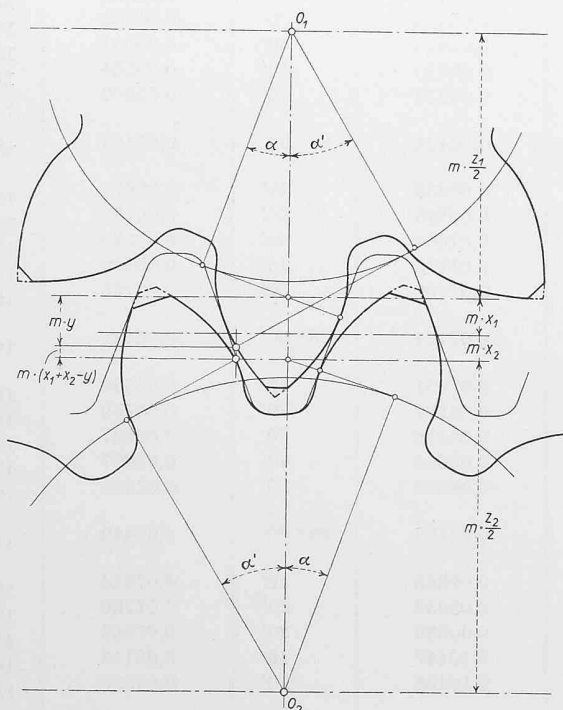


Bild 2

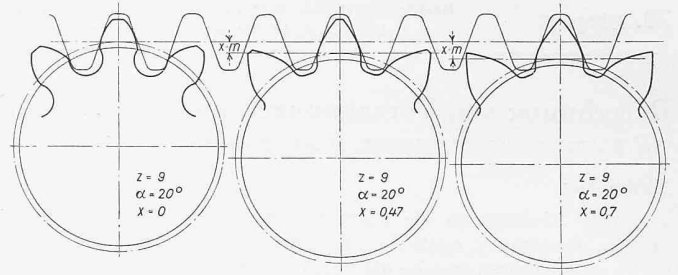


Bild 1.

um den Wert  $ym$ . Will man das ursprüngliche Kopfspiel wahren, darf der Kopfkreisradius nur um den Betrag  $(y - x_2)m$  bzw.  $(y - x_1)m$  vergrössert werden.

Der Zusammenhang zwischen Profilverzahnung, Lauf-eingriffswinkel und spielfreier Achsdistanz ist aus Bild 3 ersichtlich, in der der Einfachheit halber die Werte wieder für den Modul 1 eingetragen wurden. Die Räder müssen für spielfreien Eingriff um den Betrag  $\overline{D_1 D_2}$  zusammengerückt werden und kämten dann mit dem neuen Eingriffswinkel  $\alpha'$ . Die neue Eingriffslinie wird nun gebildet durch die dann in einer Flucht liegenden Strecken  $\overline{E_2 D_2 D_1 E_1}$ . Die Strecke  $\overline{O_1 C}$  ist gleich der Summe der Strecken  $\overline{A_1 B_1'} + \overline{A_2 B_2'}$ , oder, nach der Definition der Evolvente, gleich  $\overline{A_1 B_1} + \overline{A_2 B_2}$ . Es ist also:

$$\left( \frac{z_1}{2} + x_1 + \frac{z_2}{2} + x_2 \right) \sin \alpha = \frac{z_1}{2} \cos \alpha (\alpha + \operatorname{tg} \alpha' - \alpha') + \frac{z_2}{2} \cos \alpha (\alpha + \operatorname{tg} \alpha' - \alpha') \\ \frac{z_1 + z_2}{2} + x_1 + x_2 = \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha + \operatorname{tg} \alpha' - \alpha')$$

Wird  $\operatorname{tg} \alpha' - \alpha' = \operatorname{inv} \alpha'$  gesetzt, so lässt sich nach Umformung die Gleichung schreiben:

$$(1) \quad \frac{x_1 + x_2}{\frac{z_1 + z_2}{2}} = \operatorname{ctg} \alpha (\alpha + \operatorname{inv} \alpha') - 1 = \frac{\operatorname{inv} \alpha' - \operatorname{inv} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Die neue Achsdistanz  $a$  wird (für Modul 1 betrachtet) nach Bild 2:

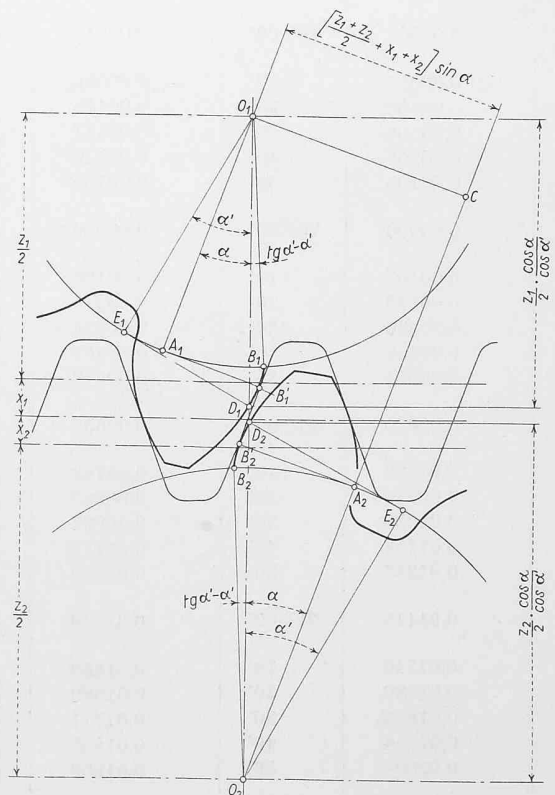


Bild 3.

Tabelle 2.  $K$ -Werte zur Berechnung der ideellen Zähnezah  $z_v$  bei einem Erzeugungseingriffswinkel  $\alpha = 20^\circ$ .  $z_v = z \frac{\text{inv } \alpha_a}{\text{inv } \alpha} = z K$ .

$d$	$\alpha_a^\circ$	$\cos \beta$	$K$	$d$	$d$	$\alpha_a^\circ$	$\cos \beta$	$K$	$d$	$d$	$\alpha_a^\circ$	$\cos \beta$	$K$	$d$
925	20,0000	1,000	1,0000	144	1276	23,6783	0,830	1,6944	289	1825	28,6929	0,665	3,1224	645
933	20,0925	0,995	1,0144	147	1289	23,8059	0,825	1,7233	295	1846	28,8754	0,660	3,1869	663
941	20,1858	0,990	1,0291	150	1302	23,9348	0,820	1,7528	303	1868	29,0600	0,655	3,2532	680
950	20,2799	0,985	1,0441	153	1316	24,0650	0,815	1,7831	309	1890	29,2468	0,650	3,3212	699
958	20,3749	0,980	1,0594	155	1329	24,1966	0,810	1,8140	316	1912	29,4358	0,645	3,3911	719
967	20,4707	0,975	1,0749	159	1343	24,3295	0,805	1,8456	323	1935	29,6270	0,640	3,4630	739
976	20,5674	0,970	1,0908	161	1357	24,4638	0,800	1,8779	331	1958	29,8205	0,635	3,5369	759
985	20,6650	0,965	1,1069	165	1371	24,5995	0,795	1,9110	339	1982	30,0163	0,630	3,6128	781
994	20,7635	0,960	1,1234	169	1385	24,7366	0,790	1,9449	347	2005	30,2145	0,625	3,6909	802
1003	20,8629	0,955	1,1403	171	1400	24,8751	0,785	1,9796	354	2030	30,4150	0,620	3,7711	826
1012	20,9632	0,950	1,1574	175	1415	25,0151	0,780	2,0150	364	2054	30,6180	0,615	3,8537	850
1021	21,0644	0,945	1,1749	178	1430	25,1566	0,775	2,0514	371	2079	30,8234	0,610	3,9387	874
1031	21,1665	0,940	1,1927	182	1445	25,2996	0,770	2,0885	381	2104	31,0313	0,605	4,0261	899
1041	21,2696	0,935	1,2109	186	1460	25,4441	0,765	2,1266	389	2130	31,2417	0,600	4,1160	926
1050	21,3737	0,930	1,2295	189	1477	25,5901	0,760	2,1655	400	2157	31,4547	0,595	4,2086	952
1060	21,4787	0,925	1,2484	194	1492	25,7378	0,755	2,2055	408	2183	31,6704	0,590	4,3038	982
1071	21,5847	0,920	1,2678	197	1508	25,8870	0,750	2,2463	419	2210	31,8887	0,585	4,4020	1010
1081	21,6918	0,915	1,2875	201	1525	26,0378	0,745	2,2882	429	2238	32,1097	0,580	4,5030	1041
1090	21,7999	0,910	1,3076	206	1542	26,1903	0,740	2,3311	440	2265	32,3335	0,575	4,6071	1072
1101	21,9089	0,905	1,3282	209	1558	26,3445	0,735	2,3751	450	2294	32,5600	0,570	4,7143	1106
1111	22,0190	0,900	1,3491	214	1576	26,5003	0,730	2,4201	462	2323	32,7894	0,565	4,8249	1138
1123	22,1301	0,895	1,3705	219	1594	26,6579	0,725	2,4663	474	2353	33,0217	0,560	4,9387	1175
1133	22,2424	0,890	1,3924	223	1611	26,8173	0,720	2,5137	485	2382	33,2570	0,555	5,0562	1210
1144	22,3557	0,885	1,4147	228	1628	26,9784	0,715	2,5622	498	2412	33,4952	0,550	5,1772	1249
1155	22,4701	0,880	1,4375	233	1647	27,1412	0,710	2,6120	511	2443	33,7364	0,545	5,3021	1287
1167	22,5856	0,875	1,4608	237	1666	27,3059	0,705	2,6631	523	2475	33,9807	0,540	5,4308	1329
1178	22,7023	0,870	1,4845	243	1685	27,4725	0,700	2,7154	537	2506	34,2282	0,535	5,5637	1372
1190	22,8201	0,865	1,5088	248	1703	27,6410	0,695	2,7691	551	2539	34,4788	0,530	5,7009	1415
1201	22,9391	0,860	1,5336	254	1723	27,8113	0,690	2,8242	566	2571	34,7327	0,525	5,8424	1461
1214	23,0592	0,855	1,5590	259	1743	27,9836	0,685	2,8808	580	2605	34,9898	0,520	5,9885	1509
1226	23,1806	0,850	1,5849	265	1763	28,1579	0,680	2,9388	596	2639	35,2503	0,515	6,1394	1559
1238	23,3032	0,845	1,6114	270	1783	28,3342	0,675	2,9984	612	2673	35,5142	0,510	6,2953	1610
1250	23,4270	0,840	1,6384	277	1804	28,5125	0,670	3,0596	628	2709	35,7815	0,505	6,4563	1664
1263	23,5520	0,835	1,6661	283		28,6929	0,665	3,1224			36,0524	0,500	6,6227	
	23,6783	0,830	1,6944											

$$a = \frac{z_1 + z_2}{2} + y$$

nach Bild 3:

$$a = \frac{z_1}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} + \frac{z_2}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \frac{z_1 + z_2}{2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

somit

$$\frac{z_1 + z_2}{2} + y = \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

oder

$$(2) \quad \frac{y}{\frac{z_1 + z_2}{2}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} - 1$$

Aus den Gleichungen (1), (2) und den Tafeln für trigonometrische und Evolventenfunktionen lassen sich somit für gegebene Profilverschiebungen der spielfreie Achsabstand, oder umgekehrt, wenn Zähnezahlen und Achsabstand gegeben sind, die Summe der Profilverschiebungen für Modul 1 berechnen. Für andere Moduli müssen die Werte sinngemäss mit dem Modul multipliziert werden. Die Gleichungen gelten auch für negative Profilverschiebungen; die Grössen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $y$  sind bei den folgenden Anwendungen immer mit den entsprechenden Vorzeichen einzusetzen. Wird die algebraische Summe von  $x_1 + x_2$  negativ, so wird  $y$  ebenfalls negativ; der Faktor für die Kopfkürzung  $x_1 + x_2 - y$  aber positiv, d. h. die gemeinsame Zahnhöhe wird in jedem Fall kleiner als bei Normalverzahnung.

Sind die beiden Profilverschiebungsfaktoren dem Absolutwerte nach gleich gross, tragen aber entgegengesetzte Vorzeichen, so wird  $x_1 + x_2 = 0$ , und der Achsverschiebungsfaktor  $y$  wird nach den Gleichungen (1) und (2) ebenfalls 0; mit andern Worten, Achsdistanz und Eingriffswinkel werden nicht geändert (V-Nullgetriebe oder AEG Verzahnung; Räder, deren Profilverschiebungen eine Achsdistanzänderung bedingt, werden V-Getriebe genannt).

Werden in analoger Weise die Gleichungen für Innenverzahnungen abgeleitet, so erhält man:

$$(1a) \quad \frac{x_2 - x_1}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)} = \frac{\text{inv } \alpha' - \text{inv } \alpha}{\text{tg } \alpha}$$

$$(2a) \quad \frac{y}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} - 1$$

Um die Rechnung noch weiter zu vereinfachen, wurden die Funktionswerte

$$f(\alpha') = \frac{\text{inv } \alpha' - \text{inv } \alpha}{\text{tg } \alpha}$$

$$f(\alpha') = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} - 1$$

für den Erzeugungseingriffswinkel  $\alpha = 20^\circ$  in Tabelle 1 zusammengestellt; es lässt sich somit für einen gegebenen Wert

$$\frac{x_1 + x_2}{\frac{1}{2}(z_1 + z_2)} \text{ bzw. } \frac{x_2 - x_1}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)}$$

sofort der zugehörige Laueingriffswinkel  $\alpha'$  und der Wert

$$\frac{y}{\frac{1}{2}(z_1 + z_2)} \text{ bzw. } \frac{y}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)}$$

aufschlagen, und umgekehrt.

## 2. Berechnung der Getriebeabmessungen

### A. Stirnräder

#### a) Grundkreisdurchmesser $d_b$

Die Grundkreisdurchmesser werden durch die Profilverschiebung nicht geändert; sie betragen

$$(3a) \quad d_{b1} = z_1 m \cos \alpha$$

$$(3b) \quad d_{b2} = z_2 m \cos \alpha$$

Die Werte  $m \cos \alpha$  können für den Werkzeugeingriffswinkel  $\alpha = 20^\circ$  und die gebräuchlichen Moduli der Tabelle 3 entnommen werden.

#### b) Kopfkreisdurchmesser $d_k$

Der Radius des Kopfkreises wird für normales Kopfspiel

$$r_{k1} = \frac{z_1}{2} m + x_1 m + 1 m - (x_1 + x_2 - y) m$$

somit der Aussendurchmesser des Rades 1

$$(4a) \quad d_{k1} = m [z_1 + 2(1 - x_2 + y)]$$

und des Rades 2

$$(4b) \quad d_{k2} = m [z_2 + 2(1 - x_1 + y)]$$

Für Getriebe mit negativem  $y$  sind  $r_{k1}$  und  $r_{k2}$  nach Abschnitt 3 zu kontrollieren!

#### c) Fusskreisdurchmesser $d_f$

$$(5a) \quad d_{f1} = m [z_1 - 2(1 + c_0 - x_1)]$$

$$(5b) \quad d_{f2} = m [z_2 - 2(1 + c_0 - x_2)]$$

Hierin bedeutet  $c_0$  das Kopfspiel am Werkzeug.

#### d) Lauf-Wälzkreisdurchmesser $d'$

$$(6a) \quad d_1' = \frac{2a z_1}{z_1 + z_2}$$

$$(6b) \quad d_2' = \frac{2a z_2}{z_1 + z_2}$$

Die Berechnung der Lauf-Wälzkreise ist für Stirnräder in den meisten Fällen nicht nötig.

#### e) Achsdistanz $a$

$$(7) \quad a = m \left( \frac{z_1 + z_2}{2} + y \right)$$

#### f) Zahnhöhe $h$

$$(8a) \quad h_1 = \frac{d_{k1} - d_{f1}}{2}$$

$$(8b) \quad h_2 = \frac{d_{k2} - d_{f2}}{2}$$

Die gemeinsame Zahnhöhe  $h'$  ist

$$(9) \quad h' = r_{k1} + r_{k2} - a$$

#### g) Kontrollmass $Wz'$ (Bild 4, 5)

Leider hat sich das Messen nach dieser, von Wildhaber [10] vorgeschlagenen Methode immer noch nicht gebührend eingeführt. Das Mass  $Wz'$  setzt sich zusammen aus einer Anzahl Eingriffsteilungen  $t_b$  und einer auf den Grundkreis bezogenen Zahnstärke  $s_b$ .

Misst man über  $z'$  Zähne, so wird für Räder mit Profilverschiebung:

für Rad 1

$$(10a) \quad Wz' = m \cos \alpha [(z' - 0,5) \pi + z_1 \operatorname{inv} \alpha] + 2 m x_1 \sin \alpha$$

für Rad 2

$$(10b) \quad Wz' = m \cos \alpha [(z' - 0,5) \pi + z_2 \operatorname{inv} \alpha] + 2 m x_2 \sin \alpha$$

Die Anzahl Zähne, über die gemessen werden soll, bestimmt sich aus

$$(11) \quad z' = z \frac{\alpha^0}{180^0} + 0,5$$

Tabelle 3. Grundkreismoduli  $m_b$  und Grundkreisteilungen  $t_b$  für  $\alpha = 20^\circ$ ,  $m_b = m \cos \alpha$ ,  $t_b = m \pi \cos \alpha$

$m$	$m_b$	$t_b$	$m$	$m_b$	$t_b$
0,3	0,281 908	0,885 639	1,75	1,644 46	5,166 23
0,325	0,305 400	0,959 442	2	1,879 39	5,904 26
0,35	0,328 892	1,033 25	2,25	2,114 31	6,642 29
0,375	0,352 385	1,107 05	2,5	2,349 23	7,380 33
0,4	0,375 877	1,180 85	2,75	2,584 15	8,118 36
0,45	0,422 862	1,328 46	3	2,819 08	8,856 39
0,5	0,469 846	1,476 07	3,25	3,054 00	9,594 43
0,55	0,516 831	1,632 67	3,5	3,288 92	10,332 46
0,6	0,563 816	1,771 28	3,75	3,523 85	11,070 49
0,7	0,657 785	2,066 49	4	3,758 77	11,808 52
0,75	0,704 769	2,214 10	4,5	4,228 62	13,284 59
0,8	0,751 754	2,361 70	5	4,698 46	14,760 65
0,9	0,845 723	2,656 92	5,5	5,638 16	17,712 79
1	0,939 693	2,952 13	6	6,108 00	19,188 85
1,125	1,057 15	3,321 15	6,5	6,577 85	20,664 92
1,25	1,175 62	3,690 16	7	7,517 54	23,617 05
1,375	1,292 08	4,059 18	8	8,457 23	26,569 18
1,5	1,409 54	4,428 20	9	9,396 93	29,521 31
			10	5,168 31	16,236 72

wobei  $z'$  auf die nächste ganze Zahl auf- oder abzurunden ist. Bei sehr grossen Profilverschiebungen ist das Mass  $Wz'$  gegebenenfalls um eine Eingriffsteilung  $t_b = \pi m \cos \alpha$  zu vergrössern oder zu verkleinern. Für die  $Wz'$ -Masse von Normalverzahnungen bestehen Tabellen; alsdann reduziert sich die Rechnung auf das Addieren bzw. Subtrahieren des Betrages  $2 m x \sin \alpha$ . Der auf das Rad entfallende Anteil des Zahnspiels  $j$  wird vom Mass  $Wz'$  subtrahiert. Normalerweise beträgt dieser Anteil  $j/2$ . Hat das Rad 1 sehr wenig Zähne, so wird das Mass  $Wz'$  für das Rad 2 um den vollen Betrag  $j$  verkleinert.

Zum Messen sollen Tellermikrometer, bei sehr grossen Rädern Schiebelehren verwendet werden. Für das Messen grossen Serien sind Grenz-Rachenlehren zu empfehlen. Das Messen der Zahndicke mit der sogenannten Zahnradschiebelehre ist möglichst zu vermeiden, da die Abnutzung der Messkanten und die Ungenauigkeiten des Radaussendurchmessers die Messgenauigkeit beeinträchtigen.

#### h) Eingriffsdauer $\varepsilon$ (Bild 6)

Die Eingriffsdauer ist gleich dem Verhältnis

$$\varepsilon = \frac{\text{Eingriffsstrecke } \overline{H_1 H_2}}{\text{Eingriffsteilung } t_b} = \frac{\overline{H_1 H_2}}{m \pi \cos \alpha}$$

$\varepsilon$  soll immer grösser sein als 1,15. Zweckmässig wird  $\varepsilon$  graphisch bestimmt, indem nach Bild 6 die Achsdistanz  $a$ , die Grund- und Kopfkreisradien  $r_{b1}$ ,  $r_{b2}$ ,  $r_{k1}$ ,  $r_{k2}$  und die Eingriffslinie  $\overline{E_1 E_2}$  aufgetragen wird. Die Strecke  $\overline{H_1 H_2}$  wird abgemessen, auf die natürliche Grösse reduziert und durch  $t_b = m \pi \cos \alpha$  dividiert ( $t_b$  aus Tabelle 3).

Soll  $\varepsilon$  rechnerisch ermittelt werden, so ist nach ten Bosch [1] aus Bild 6

$$\overline{H_1 H_2} = \overline{E_1 H_1} + \overline{E_2 H_2} - \overline{E_1 E_2}$$

somit

$$(12) \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{r_{k1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{k2}^2 - r_{b2}^2} - a \sin \alpha'}{m \pi \cos \alpha}$$

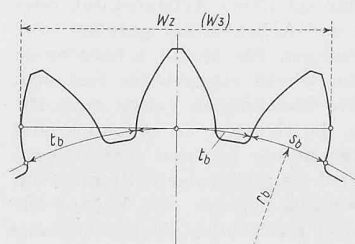


Bild 4.

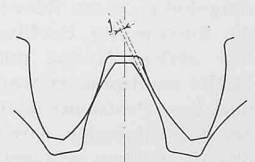


Bild 5.





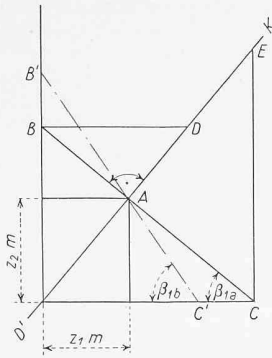


Bild 8.

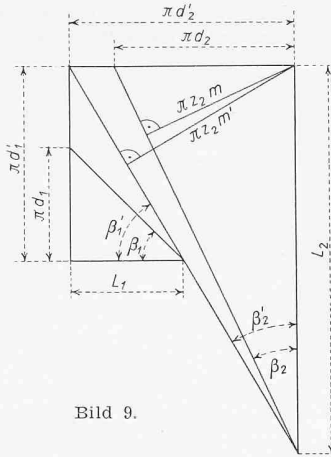


Bild 9.

n) Laufzahnschrägewinkel  $\beta'$

$$(27) \quad \tan \beta' = \frac{\pi d_1'}{L_1} = \frac{\pi d_2'}{L_2} = \frac{\tan \beta \cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

o) Lauf-Stirneingriffswinkel  $\alpha'_a$

$$(28) \quad \cos \alpha'_a = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{a}$$

p) Eingriffsdauer  $\varepsilon$

$\varepsilon$  setzt sich zusammen aus dem Stirn-Ueberdeckungsgrad  $\varepsilon_a$  und dem Ueberdeckungsgrad  $\varepsilon_q$ , herrührend von der Zahnschräge.

$$(29) \quad \varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_q$$

$\varepsilon_a$  wird in gleicher Weise berechnet wie für Räder mit geraden Zähnen, indem nach Bild 6 die Eingriffsverhältnisse im Stirnschnitt aufgezeichnet werden, und die Strecke  $\overline{H_1 H_2}$  durch die Stirn-Eingriffsteilung  $t_{ba}$  dividiert wird.  $\varepsilon_a$  kann auch aus Gleichung (30) berechnet werden.

$$(30) \quad \varepsilon_a = \frac{\sqrt{r_{k1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{k2}^2 - r_{b2}^2} - a \sin \alpha'_a}{m_a \cos \alpha_a}$$

$$(31) \quad \varepsilon_q = \frac{\text{Teilungssprung } q}{\text{Stirnteilung } t_a} = \frac{b \tan \beta}{\pi m_a}$$

#### Anmerkung

Bei den Stossrädern sind die besondern Verhältnisse bezüglich Zahnschrägewinkel und Stirnmodul zu beachten. Das Fellows-System bezieht den Erzeugungsmodul auf den Stirnschnitt, für die Berechnung der Profil- und Achsverschiebungsfaktoren sind somit die effektiven Zähnezahlen massgebend.

#### C. Stirn-Schraubgetriebe

Bei diesen Getrieben lässt sich eine Profilverschiebung meist vermeiden, wenn in eine gegebene Achsdistanz eine gegebene Uebersetzung eingebaut werden soll. Es ist empfehlenswert, für den Berechnungsvorgang die von Metral-le Ray [6] vorgeschlagene Methode anzuwenden.

Ist für ein Getriebe die Achsdistanz gegeben und  $m$ ,  $z_1$  und  $z_2$  gewählt, lässt sich aus Bild 8 der Zahnschrägewinkel  $\beta$  folgendermassen bestimmen: Auf den Koordinaten werden die Werte  $z_1 m$  und  $z_2 m$  aufgetragen. Durch den Schnittpunkt A legt man die Strecke  $\overline{BC} = 2a$  derart, dass die Endpunkte auf die Koordinaten zu liegen kommen. Lässt sich die Strecke einbringen, so bestehen meist zwei Lösungen, und der günstigere Zahnschrägewinkel ist auf Grund der Gleitverhältnisse zu wählen. Ergibt sich keine Lösung, so ist der Vorgang mit einem andern Modul oder mit andern Zähnezahlen zu wiederholen. Mit dem so ermittelten Zahnschrägewinkel kontrolliert man die Achsdistanz nach der Gleichung 32.

$$(32) \quad \frac{z_1 m}{\cos \beta_1} + \frac{z_2 m}{\cos \beta_2} = 2a$$

Die Differenz  $d a$  aus der so ermittelten und der gegebenen Achsdistanz wird eingesetzt in die Gleichung (33).

$$(33) \quad d\beta_1 = \frac{2 d a}{E D}$$

worin  $d\beta_1$  die Korrektur für den Zahnschrägewinkel  $\beta_1$  bezeichnet.  $\overline{ED}$  folgt aus Bild 8, wobei  $D'K$  senkrecht zu  $BC$  steht und durch A geht. Das Verfahren gilt auch für Stirnschraubgetriebe, deren Achsen sich nicht unter  $\Sigma = 90^\circ$  kreuzen; die Koordinaten werden dann unter dem gegebenen Winkel  $\Sigma$  gezogen.

Ergibt die oben angegebene Methode keine Lösung, so ist nach Bild 8 die günstigste Annäherung abzuschätzen und es sind  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $m$  und  $\beta_1'$  festzulegen. Bei der nun folgenden Rechnung muss beachtet werden, dass die Räder nach dem Einbau unter diesem Lauf-Eingriffswinkel kämmen müssen, und dass, von  $\beta_1'$  ausgehend, die Erzeugungs-Eingriffswinkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  berechnet werden müssen.

Bild 9 stellt die Abwicklungen der Lauf- und Erzeugungswälzzylinder dar. Für das Schraubgetriebe mit Profilverschiebung gilt, wenn  $m'$  den Laufmodul bezeichnet

$$(34) \quad \frac{z_1 m'}{\cos \beta_1'} + \frac{z_2 m'}{\cos \beta_2'} = 2a$$

oder

$$(35) \quad m' = \frac{2a}{\frac{z_1}{\cos \beta_1'} + \frac{z_2}{\cos \beta_2'}}$$

$$(36a) \quad \sin \beta_1 = \frac{m}{m'} \sin \beta_1'$$

$$(36b) \quad \sin \beta_2 = \frac{m}{m'} \sin \beta_2'$$

Damit lassen sich die Radabmessungen, wie unter 2. B angegeben, berechnen. Für die ideale Zähnezahl ist natürlich der  $\beta_1$  bzw.  $\beta_2$  entsprechende Faktor massgebend, also

$$z_{v1} = z_1 K_1, z_{v2} = z_2 K_2.$$

#### D. Innengetriebe mit geraden Zähnen

Diese Getriebe werden fast ausschliesslich mit dem Stossrad hergestellt. Neben dem genormten Bezugsprofil findet öfters Stumpfverzahnung Anwendung. Beim Entwurf von Innengetrieben muss den Einschränkungen Rechnung getragen werden, die durch die verschiedenen Interferenzmöglichkeiten gegeben sind [3]. Hat ein Getriebe ohne Profilverschiebung die Abmessungen

Werkzeug:	Modul $m$	Eingriffswinkel $\alpha$
Ritzel:	Erzeugungsteilkreis $d_1$	Kopfkreisdurchm. $d_{k1}$
	Fusskreisdurchmesser $d_{f1}$	
Innenrad:	Erzeugungsteilkreis $d_2$	Kopfkreisdurchm. $d_{k2}$
	Fusskreisdurchmesser $d_{f2}$	

so werden die Abmessungen mit Profilverschiebung:

a) Kopfkreisdurchmesser  $d_{k'}$ , wenn das ursprüngliche Kopfspiel eingehalten werden soll:

$$(37a) \quad d_{k1}' = d_{k1} + 2m(x_2 - y) \quad (\text{Ritzel})$$

$$(37b) \quad d_{k2}' = d_{k2} + 2m(x_1 + y) \quad (\text{Innenrad})$$

b) Fusskreisdurchmesser  $d_{f'}$

$$(38a) \quad d_{f1}' = d_{f1} + 2m x_1 \quad (\text{Ritzel})$$

$$(38b) \quad d_{f2}' = d_{f2} + 2m x_2 \quad (\text{Innenrad})$$

Für den Eingriff Innenrad-Stossrad ist die Rechnung in analoger Weise durchzuführen; ferner sind die verschiedenen Interferenzmöglichkeiten nachzuprüfen und das Eingriffsschema aufzuzeichnen. Massgebend für die Ausführung ist der grösste resultierende Kopfkreisdurchmesser  $d_{k'2}$ .

c) Grundkreisdurchmesser s. Gl. (3a), (3b)

d) Kontrollmass  $Wz'$  s. Gl. (10a), (10b). Für das Innenrad wird an Stelle des Tellermikrometers ein Mikrometer oder eine Schiebelehre mit genügend ausgerundeten Messschnäbeln verwendet. Bei sehr kleinen Zahnteilungen ist es zweckmässiger, die Kontrolle mit Messrollen vorzunehmen. Nach Buckingham [3] wird, wenn  $d_R$  den Durchmesser der Messrolle und  $\alpha_R$  den Hilfsinkel bezeichnen, das Kontrollmass für gerade Zähnezahl  $M_R$

$$(39) \quad M_R = m z_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_R} - d_R = \frac{d_{b2}}{\cos \alpha_R} - d_R$$

Kontrollmass für ungerade Zähnezah  $M_R'$

$$(40) \quad M_R' = m z_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_R} \cos \frac{90^\circ}{z_2} - d_R = \frac{d_{b2}}{\cos \alpha_R} \cos \frac{90^\circ}{z_2} - d_R$$

$$(41) \quad \text{inv } \alpha_R = \text{inv } \alpha + \frac{0,5 \pi + 2 x_2 \text{tg } \alpha}{z_2} - \frac{d_R - 0,5 j}{m z_2 \cos \alpha}$$

Der Messrollendurchmesser soll so gewählt werden, dass

die Rolle wenig über den Zahnkopf vorsteht. Für Räder mit geringer Profilverschiebung wird  $d_R = 1,440 m$  empfohlen.

Die Profilverschiebungen an Innengetrieben mit schrägen Zähnen lassen sich auf die gleiche Weise berechnen, sofern Stossmesser verwendet werden, bei denen das Nennmodul auf den Stirnschnitt bezogen ist; andernfalls ist die Rechnung mit Hilfe der ideellen Zähnezah vorzunehmen.

Schluss folgt

## Berechnung der Druckspannungs-Kurve im Stahlbeton-Biegequerschnitt

Von Dipl. Ing. H. HAMANN, Mülheim-Ruhr

DK 624.072.2.012.4

Haberstock bezeichnet die Klärung der Druckspannungsverteilung im Biegequerschnitt als das Hauptproblem der n-freien Rechnung und sagt schliesslich, dass eine exakte Aussage über die Form der Spannungsverteilung und über die Höchstspannung im Druckgurt derzeit nicht möglich sei [2] <sup>1)</sup>. Die Durchführung direkter Spannungsmessungen, die dieses Problem einer abschliessenden Lösung entgegenführen könnte, ist bislang nicht bekannt geworden.

Bei dem Versuch, die Spannungsverteilung zutreffend zu beurteilen, tauchen immer wieder zwei Grundgedanken schon in den ersten Arbeiten der dreissiger Jahre auf:

1. Annahme einer Affinität der an mittig gedrückten Prismen gefundenen Spannungs-Stauchungslinie mit der Spannungsverteilung im Biegequerschnitt.

2. Bestimmung des Völligkeitsgrades und des Randabstandes des Druckschwerpunktes durch Auswertung von Bruchversuchen mittels Tastrechnung, wobei man sich zur besseren Veranschaulichung meist auch ein Bild der Spannungsverteilung entwirft.

Es soll hier ein Weg gezeigt werden, der genauere Aussagen zu machen gestattet. Er fusst auf Pucherschen Grundgedanken [5], weswegen auch die von Pucher gewählte Bezeichnungsweise im Wesentlichen beibehalten wurde.

Die Ableitung, die für den Rechteckquerschnitt durchgeführt wird, beruht auf folgenden Voraussetzungen:

a) Gültigkeit der Bernoullischen Hypothese. Es sei ausdrücklich betont, dass mit einem ganz geringen Mehraufwand auf die Verwendung dieser Hypothese in folgender Entwicklung verzichtet werden könnte. Es kann bewiesen werden, dass ein Abgehen von dieser Hypothese das Charakteristikum des Endergebnisses nicht wesentlich verändert [3].

b) Die Spannungs-Stauchungslinien aller Fasern der Balkendruckzone sind annähernd gleich. Diese Annahme erscheint berechtigt, da die Stauchungsdifferenz einer Faser gegenüber der darunterliegenden Faser, somit auch die gegenseitige Beeinflussung, immer gleich ist.

c) Keine Mitwirkung der Betonzugzone. Diese Annahme wurde getroffen, weil bei den Versuchsunterlagen gewisse Angaben fehlten. Der Einfluss dieser Vernachlässigung auf das Endergebnis ist nicht wesentlich.

Die verwendeten Bezeichnungen gehen aus Bild 1 hervor. Beim Bruch geht die Randstauchung  $\varepsilon_{br}$  in die Bruchstauchung  $\varepsilon_{bB}$  und die Betonrandspannung  $\sigma_{br}$  in die Betonbruchrandspannung  $\sigma_{bB}$  über. Es wird weiter verwendet:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_{bB}} \leq 1;$$

$$\varphi' = \frac{\sigma_{br}}{\sigma_{bB}} \geq 1;$$

$$(1) \quad x = \frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_{br} + \varepsilon_e} h = \xi h$$

Für den Belastungszustand  $\varphi$  wird mit der dimensionslosen Integrationsvariablen  $\alpha$

$$u = \frac{\alpha}{\varphi} x; du = \frac{\xi}{\varphi} h d\alpha$$

Die Betondruckkraft ist dann

$$D_b = \int_{u=0}^{u=x} \sigma_b b du = \xi \sigma_{bB} b h \frac{1}{\varphi} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\varphi} \varphi'(\alpha) d\alpha = k \xi \sigma_{bB} b h$$

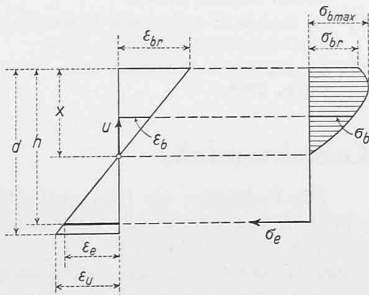


Bild 1. Bezeichnungen

Das Moment von  $D_b$  um die Nulllinie wird

$$M_0 = \int_{u=0}^{u=x} \sigma_b b u du = \xi^2 \sigma_{bB} b h^2 \frac{1}{\varphi^2} \int_0^{\varphi} \varphi'(\alpha) \alpha d\alpha$$

Bezeichnen wir mit  $\lambda = 1 - \frac{1}{\varphi^2 k} \int_0^{\varphi} \varphi'(\alpha) \alpha d\alpha$ , so ergibt sich

$$z = h - x + \frac{M_0}{D_b} = h(1 - \lambda \xi)$$

Es gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$(2) \quad k \xi \sigma_{bB} b h = F_e \sigma_e \quad k = \mu \frac{\sigma_e}{\sigma_{bB}} \frac{1}{\xi}$$

und

$$M = k \xi \sigma_{bB} b h z = k \xi \sigma_{bB} b h^2 (1 - \lambda \xi)$$

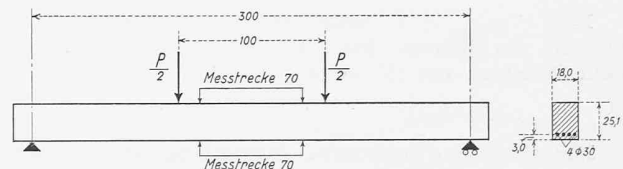


Bild 2. Versuchsbalken

Wir führen unsere Überlegungen an einem stark bewehrten Versuchsbalken nach Bild 2 weiter. Misst man bei stufenweiser Aufbringung der Belastung jeweils die einander zugeordneten Verlängerungen der Stahleinlagen und die Zusammendrückungen der Betons an der oberen Balkenfläche bis zum Bruch, so erhält man eine Funktion  $\varepsilon_e(\varphi) = \Phi$ .

(1) etwas umgewandelt in (2) eingesetzt ergibt nämlich mit  $\sigma_e = E_e \varepsilon_e$ :

$$k = \mu \frac{E_e \varepsilon_e}{\sigma_{bB}} \left( 1 + \frac{\varepsilon_e}{\varphi \varepsilon_{bB}} \right)$$

$$\frac{1}{\varphi} \int_0^{\varphi} \varphi'(\alpha) d\alpha = \frac{\mu E_e}{\sigma_{bB}} \Phi \left( 1 + \frac{\Phi}{\varphi \varepsilon_{bB}} \right)$$

$$(3) \quad \varphi'(\varphi) = \frac{\mu E_e}{\sigma_{bB}} \left[ \frac{d}{d\varphi} (\varphi \Phi) + \frac{1}{\varepsilon_{bB}} \frac{d}{d\varphi} \Phi^2 \right] + c$$

Diese Funktion gilt allgemein, also nicht nur für eine bestimmte Faser des gedrückten Querschnittes. Die Konstante  $c$  wollen wir hier nicht weiter beachten, da wir annehmen wollen, dass unsere Balken bei Versuchsbeginn spannungsfrei sind, das heisst z. B. keiner Schwindvorspannung unterliegen.

In den meisten Fällen wird es ausreichen,  $\varepsilon_e(\varphi)$  durch eine Parabel 2. Grades anzunähern:

$$\Phi = a_1 \varphi + a_2 \varphi^2$$

Wir erhalten dann nach Gleichung (3)

$$(4) \quad \varphi'(\varphi) = \frac{\mu E_e}{\sigma_{bB}} \times \left[ \frac{4 a_2^2}{\varepsilon_{bB}} \varphi^3 + \left( \frac{6 a_1 a_2}{\varepsilon_{bB}} + 3 a_2 \right) \varphi^2 + \left( \frac{2 a_1^2}{\varepsilon_{bB}} + 2 a_1 \right) \varphi \right]$$

Die Betonbruchrandspannung erhält man, wenn man  $\varphi = \varphi' = 1$  setzt:

$$(5) \quad \sigma_{bB} = \frac{2 \mu E_e}{\varepsilon_{bB}} [2 a_2^2 + 3 a_1 a_2 + 1,5 a_2 \varepsilon_{bB} + a_1^2 + a_1 \varepsilon_{bB}]$$

<sup>1)</sup> Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis.