

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE GAUSS SUR LE NOMBRE DE CLASSES
Autor: Oesterlé, J.
Kapitel: §2. Formes quadratiques réduites
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-56588>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LEMME 2. Il n'y a qu'un nombre fini de triplets de nombres entiers (a, b, c) tels que $b^2 - 4ac = -d$ et $|b| \leq a \leq c$.

Démontrons le lemme 1. Soit $ax^2 + bxy + cy^2$ une forme quadratique appartenant à la classe C considérée. Par hypothèse cette forme est positive, de sorte que $a > 0$ et $c > 0$. Les changements de variables $(x, y) \mapsto (x - \varepsilon y, y)$ et $(x, y) \mapsto (x, y - \varepsilon x)$, où ε est le signe de b , ont pour effet de remplacer (a, b, c) par $(a, b - 2\varepsilon a, a + c - |b|)$ et par $(a + c - |b|, b - 2\varepsilon c, c)$. Si donc $|b| > a$ ou $|b| > c$, on peut remplacer $ax^2 + bxy + cy^2$ par une forme équivalente pour laquelle la quantité $a + c$ est strictement plus petite. Après un nombre fini de substitutions de ce type, on trouve une forme $ax^2 + bxy + cy^2$ dans C pour laquelle $|b| \leq a$ et $|b| \leq c$. Cette forme, ou la forme $cx^2 - bxy + ay^2$ qui s'en déduit par le changement de variables $(x, y) \mapsto (y, -x)$, remplit les conditions du lemme 1.

Démontrons le lemme 2. Si (a, b, c) sont comme dans l'énoncé de ce lemme, on a

$$(3) \quad d = 4ac - b^2 \geq 4a^2 - a^2 = 3a^2,$$

de sorte que a ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs; il en est alors de même de b et de c , puisque $|b| \leq a$ et $c = (b^2 + d)/4a$.

§ 2. FORMES QUADRATIQUES RÉDUITES ¹⁾

Dans ce paragraphe, nous montrons comment la *théorie de la réduction* de Gauss permet de sélectionner un représentant dans chaque classe C de formes quadratiques de discriminant $-d$.

Nous savons déjà que C contient une forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$ telle que $|b| \leq a \leq c$ (lemme 1 du § 1). Peut-il y avoir plusieurs formes de ce type dans C ? En fait, la seule autre possible est $ax^2 - bxy + cy^2$, lorsqu'elle est dans C . Ceci vient du fait que $|b|$ est déterminé par a et c (on a $b^2 - 4ac = -d$), et que a, c sont caractérisés par le fait que pour toute forme quadratique $q \in C$, on a

$$(4) \quad a = \inf (q(\mathbf{u})) \quad (\mathbf{u} \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Z}^2);$$

$$(5) \quad ac = \inf (q(\mathbf{u})q(\mathbf{v})) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ non colinéaires dans } \mathbf{Z}^2).$$

Il nous suffit en effet de vérifier (4) et (5) pour une seule forme quadratique $q \in C$, par exemple la forme $ax^2 + bxy + cy^2$ elle-même. Mais

¹⁾ C.-F. GAUSS, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 171 et 172.

pour celle-ci, on a $q(1, 0) = a$, $q(0, 1) = c$ et $q(x, y) \geq ax^2 - |b|xy + cy^2 \geq (2a - |b|)|xy| + (c - a)y^2$, d'où

$$(6) \quad \begin{aligned} q(x, 0) &\geq a, & \text{si } x \neq 0 \\ q(0, y) &\geq c, & \text{si } y \neq 0 \\ q(x, y) &\geq (2a - |b|)|xy| + (c - a)y^2 = a + c - |b| \geq c & \text{si } xy \neq 0, \end{aligned}$$

et donc les égalités (4) et (5).

Voyons maintenant dans quels cas la forme $ax^2 - bxy + cy^2$ appartient à la classe C :

LEMME. *Pour que la forme $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ (avec $|b| \leq a \leq c$) soit équivalente à la forme $q'(x, y) = ax^2 - bxy + cy^2$, il faut et il suffit que l'on ait $a = |b|$, $a = c$ ou $b = 0$.*

On a $q(x, y) = q'(x \pm y, y)$ si $a = \pm b$, $q(x, y) = q'(y, -x)$ si $a = c$, $q(x, y) = q'(x, y)$ si $b = 0$. Supposons $0 < |b| < a < c$. S'il existe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ tel que $q'(x, y) = q(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, on a $q(\alpha, \gamma) = a$ et $q(\beta, \delta) = c$, d'où $\gamma = 0$ puis $\beta = 0$ en appliquant (6), et finalement $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \pm I$, ce qui est absurde.

L'étude qui précède nous conduit à adopter la définition suivante : une forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$ est dite *réduite* si l'on a

$$\begin{aligned} |b| &\leq a \leq c \\ b &\geq 0 \quad \text{si } a \text{ est égal à } |b| \text{ ou à } c. \end{aligned}$$

Nous avons alors prouvé le théorème suivant :

THÉORÈME. *Chaque classe de formes quadratiques de discriminant $-d$ contient une unique forme réduite.*

La démonstration du lemme 1 du § 1 fournit en fait un algorithme permettant d'obtenir la forme quadratique réduite équivalente à une forme donnée.

Exemple. Appliqué à la forme quadratique $9x^2 + 43xy + 53y^2$ (représentée par (9, 43, 53) pour abréger), cet algorithme s'écrit

$$(9, 43, 53) \sim (9, 25, 19) \sim (9, 7, 3) \sim (5, 1, 3) \sim (3, -1, 5)$$

et $3x^2 - xy + 5y^2$ est la forme réduite cherchée.