§7. Le théorème de Goldfeld

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Birch et Swinnerton-Dyer ont émis une autre conjecture, stupéfiante car elle relie la fonction L_E, définie à partir des nombres de solutions de l'équation (W) sur les corps finis, au rang r de $E(\mathbf{Q})$ qui fournit une information sur les solutions rationnelles de l'équation (W). Cette conjecture suppose implicitement la conjecture 1 satisfaite:

CONJECTURE 3 (Birch et Swinnerton-Dyer). *Le rang r de $E(\mathbf{Q})$ est égal à l'ordre du zéro de la fonction L_E au point* 1.

(Birch et Swinnerton-Dyer donnent en outre une expression conjecturale de $\lim_{s\to 1}(s-1)^r L_E(s)$.)

§ 7. LE THÉORÈME DE GOLDFELD

Un pas décisif vers la solution effective du problème du nombre de classes a été franchi par Goldfeld en 1976. L'idée à la base de son travail est la suivante: Supposons que nous connaissions une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ telle que pour tout caractère de Dirichlet $\chi: n \mapsto \left(\frac{-d}{n}\right)$ avec $-d$ discriminant fondamental, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}$ ait un comportement analytique très différent de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda(n) n^{-s}$ où λ est la fonction multiplicative introduite à la fin de II, § 2. On peut alors espérer d'après le principe de II, § 2, montrer de façon effective que lorsque d est grand, $h(-d)$ ne peut être petit.

De fait, Goldfeld montre [1]) qu'il suffit de *connaître une seule courbe elliptique E* définie sur $\mathbf{Q}$ telle que

— E soit une *courbe de Weil*;

— la fonction L_E ait un zéro *au moins triple* au point 1,

et d'appliquer l'idée précédente à la série de Dirichlet L_E pour obtenir des minorations effectives de nombres de classes. Celles-ci sont bien moins bonnes que celles que donne l'hypothèse de Riemann généralisée (cf. § 3):

---

[1]) D. M. GOLDFELD, *The conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and the class number of quadratic fields*, Journées Arithmétiques de Caen, Astérisque 41-42 (1977), 219-227.

on obtient par exemple [1]) pour $h(-d)$ *impair* une inégalité de la forme

$$h(-d) \geqslant c_E \log d \tag{34}$$

où c_E est une constante dépendant de la courbe elliptique E choisie, et susceptible d'être calculée. (Plus généralement, si $h(-d)$ est de la forme $2^t h'$ avec h' impair, on a une inégalité analogue à (34) à condition de remplacer c_E par une nouvelle constante $c_E(t)$ qui dépend de t, par exemple $c_E(t) = c_E e^{-3\sqrt{t}}$, et de supposer d premier à N_E; cette dernière condition peut même être omise si l'on choisit E convenablement comme l'ont remarqué Gross et Zagier.)

Comment trouver E remplissant les deux conditions énoncées ci-dessus? On commence par choisir une courbe elliptique E telle que le groupe $E(\mathbf{Q})$ ait un rang impair $r \geqslant 3$ (il y en a une infinité et on peut en expliciter à volonté). On vérifie qu'elle est de Weil (soit parce qu'elle est à multiplications complexes, soit par un calcul sur ordinateur) et que le signe ε_E de l'équation fonctionnelle de L_E est -1 (par le calcul). La fonction L_E a alors un zéro d'ordre ρ *impair* en 1, et si l'on croit en la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, ρ doit être égal à r, donc $\geqslant 3$. Malheureusement, cette conjecture n'est pas démontrée. Peut-on s'en passer et dans le cas particulier choisi, prouver directement l'inégalité $\rho \geqslant 3$? Puisque ρ est impair, cela revient à montrer que $L'_E(1) = 0$. Il est possible d'obtenir par calcul sur ordinateur des valeurs approchées de $L'_E(1)$, mais a priori même si celles-ci sont très petites on ne peut conclure à la nullité de $L'_E(1)$.

Il a fallu attendre 1983 et les travaux de Gross et Zagier pour arriver enfin à surmonter cette difficulté et à appliquer le théorème de Goldfeld.

§ 8. Le théorème de Gross et Zagier

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ et soit $P \in E(\mathbf{Q})$ un point rationnel de E. Ecrivons l'abscisse $x(n(P))$ du point $P + \ldots + P$ (n termes, la somme étant calculée dans le groupe $E(\mathbf{Q})$) sous forme d'une fraction irréductible a_n/b_n. On montre que l'expression $\frac{1}{2} n^{-2} \log(\sup(|a_n|, |b_n|))$ a une limite $\hat{h}(P)$ lorsque P tend vers $+\infty$, appelée *hauteur de Néron-Tate de P.*

[1]) Cette inégalité, un peu meilleure que celle de Goldfeld, est prouvée par la même méthode dans mon exposé sur la question au Séminaire Bourbaki (Juin 1984, exposé 631).