III. Application au cas n = 2

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

III. Application au cas $n = 2$

Nous considérons désormais $E = \mathbf{R}^2$, espace vectoriel que nous identifions à $\mathbf{C}$. L'espace $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ est, comme ci-dessus, normé par $\| u \| = \sup_{|z| \leqslant 1} |u(z)|$ (attention, $u \mapsto \| u \|$ n'est pas euclidienne!); $\mathscr{B}$ est la boule unité de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$. Rappelons que si $z = x + iy$, on pose

$$\partial u/\partial z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \partial u/\partial \bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Lemme 1. *L'application* $u \mapsto (\partial u/\partial z, \partial u/\partial \bar{z})$, *de* $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ *vers* $\mathbf{C}^2$, *est un* $\mathbf{R}$*-isomorphisme, et* $\| u \| = |\partial u/\partial z| + |\partial u/\partial \bar{z}|$.

Démonstration.

On a $u(z) = \partial u/\partial z\, z + \partial u/\partial \bar{z}\, \bar{z}$, d'où $|u(z)| \leqslant (|\partial u/\partial z| + |\partial u/\partial \bar{z}|)\,|z|$ et en posant $\partial u/\partial z = re^{i\theta}$, $\partial u/\partial \bar{z} = \rho e^{i\varphi}$, on obtient

$$|u(e^{i(\varphi-\theta)/2})| = r + \rho\,.$$

Lemme 2. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, $u \neq 0$, u *tel que* $u/\| u \|$ *ne soit pas une isométrie. Alors*:

1) *Il existe* v *et* w *isométries de* $\mathbf{R}^2$, α *et* $\beta > 0$, *tels que* $u = \alpha v + \beta w$ *et* $\| u \| = \alpha + \beta$.

2) *La solution unique du problème est donnée par*

$$\alpha = |\partial u/\partial z|\,, \quad \beta = |\partial u/\partial \bar{z}|\,, \quad \alpha v(z) = \partial u/\partial z\, z\,, \quad \beta w(z) = \partial u/\partial \bar{z}\, \bar{z}\,.$$

Démonstration. La solution explicitée convient d'après le lemme 1. Démontrons l'unicité:

Soit z_0 non nul, tel que $|u(z_0)| = (\alpha+\beta)\,|z_0|$. On a par ailleurs

$$|u(z_0)| \leqslant |\alpha v(z_0) + \beta w(z_0)| \leqslant (\alpha+\beta)\,|z_0|\,.$$

L'égalité des termes extrêmes, jointe au signe de α et β, implique $v(z_0) = w(z_0)$; et ceci ne peut se produire que lorsque v et w sont respectivement holomorphes et antiholomorphes, car $v \neq w$.

Il existe donc A et B dans $\mathbf{C}^*$, tels que

$$\alpha v(z) = Az\,, \quad \beta w(z) = B\bar{z}\,,$$

d'où $u(z) = Az + B\bar{z}$, ce qui entraîne $A = \partial u/\partial z$ et $B = \partial u/\partial \bar{z}$, et l'on en déduit les valeurs de α et β, puis v et w.

Notation. On qualifiera désormais de paire (resp. d'impaire) toute isométrie de déterminant $+1$ (resp. -1).

Remarque. On vérifie que la frontière de B ne contient aucun convexe de dimension $\geqslant 2$; la norme $u \mapsto \| u \|$ est « presque » strictement convexe. Le fait est important pour l'étude des isométries linéaires de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, à laquelle nous allons nous consacrer désormais.

LEMME 3. *Soit* Φ *une isométrie linéaire de* $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ *dans lui-même. Alors:*

1) Φ *conserve (resp. inverse) la parité des isométries de* $\mathbf{R}^2$.

2) *Les applications*

$$\hat{c}u/\hat{c}z \mapsto \hat{c}/\hat{c}z\ \Phi(u) \quad et \quad \hat{c}u/\hat{c}\bar{z} \mapsto \hat{c}/\hat{c}\bar{z}\ \Phi(u)$$
$$(resp.\ \hat{c}u/\hat{c}z \mapsto \hat{c}/\hat{c}\bar{z}\ \Phi(u) \quad et \quad \hat{c}u/\hat{c}\bar{z} \mapsto \hat{c}/\hat{c}z\ \Phi(u))$$

appartiennent au groupe orthogonal $O(2)$.

Démonstration. 1) Soit v et w des isométries de parités opposées; quels que soient $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha + \beta = 1$, on a $\| \alpha v + \beta w \| = 1$ donc $\| \Phi(\alpha v + \beta w) \| = 1$. Or $\Phi(\alpha v + \beta w) = \alpha\Phi(v) + \beta\Phi(w)$. Puisque $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$ sont des points extrémaux de $\mathscr{B}$, ce sont des isométries de $\mathbf{R}^2$; à l'inverse $\alpha v + \beta w$ et $\alpha\Phi(v) + \beta\Phi(w)$ ne sont pas des isométries; d'après le lemme 2, $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$ sont de parités opposées. Ainsi pour toute isométrie impaire w, $\Phi(w)$ est de parité opposée à celle de $\Phi(I)$, ce qui implique que pour toute parité paire v, $\Phi(v)$ est de même parité que $\Phi(I)$.

2) Plaçons-nous dans le premier cas, et utilisons l'identification de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ avec $\mathbf{C}^2$ découlant du lemme 1.

Si $Z = (z_1, z_2) = (z_1, 0) + (0, z_2)$ alors $\Phi(Z) = \Phi[(z_1, 0)] + \Phi[(0, z_2)]$ d'où dans le cas envisagé:

$$\Phi(Z) = (\varphi_1(z_1), 0) + (0, \varphi_2(z_2)).$$

Les applications φ_1 et φ_2 sont clairement $\mathbf{R}$-linéaires de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, et en faisant successivement $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$, on obtient $| \varphi_1(z_1) | = | z_1 |$ et $| \varphi_2(z_2) | = | z_2 |$. On ramène le second cas au premier en composant Φ avec l'application $\pi: (z_1, z_2) \to (z_2, z_1)$, qui est bien une isométrie de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$.

Prenons dans chaque facteur du produit $\mathbf{C}^2$ une base orthonormée; la matrice de Φ est alors de l'un des deux types suivants:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & \Phi_2 \\ \Phi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Φ_1 et Φ_2 sont des matrices 2×2 orthogonales). Selon les signes respectifs des déterminants de Φ_1 et Φ_2 on obtient 8 composantes connexes dans le groupe Γ des isométries de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$.

Soit Γ_1 la composante neutre de Γ, qui est clairement isomorphe à $SO(2) \times SO(2)$. Introduisons

$$\sigma_1 : (z_1, z_2) \mapsto (\bar{z_1}, z_2), \qquad \sigma_2 : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, \bar{z_2}),$$

et dressons la liste des composantes de Γ:

Γ_1	$\sigma_1\Gamma_1$	$\sigma_2\Gamma_1$	$\sigma_2\sigma_1\Gamma_1$
$\pi\Gamma_1$	$\pi\sigma_1\Gamma_1$	$\pi\sigma_2\Gamma_1$	$\pi\sigma_2\sigma_1\Gamma_1$

Les 4 composantes de la 1re ligne forment un groupe isomorphe à $O(2) \times O(2)$; c'est le groupe des isométries de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ qui conservent la parité, c'est-à-dire qui ont une matrice du 1er type. Les 2 composantes de la colonne de gauche constituent le groupe des isométries $\mathbf{C}$-linéaires de $\mathbf{C}^2$. Dans ce groupe Γ' opère naturellement le groupe $\{I, \pi\}$ noté c_2, si bien que Γ' est isomorphe au produit semi-direct de $SO(2)$ par lui-même.

Enfin les composantes situées dans les 2 colonnes extrêmes du tableau forment le groupe des isométries de déterminant 1; on note $S\Gamma$ ce groupe.

Pour v et $w \in O(2)$, et $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, posons $\Phi_{v,w}(u) = vuw^{-1}$.

THÉORÈME 2. *L'application* $(v, w) \mapsto \Phi_{v,w}$ *est une représentation linéaire de* $O(2) \times O(2)$ *sur le groupe* $S\Gamma$, *dont le noyau a 2 éléments.*

Démonstration. $\Phi_{v,w}$ est une isométrie, en effet:

$$\| vuw^{-1} \| \leqslant \| v \| \, \| u \| \, \| w^{-1} \| = \| u \| = \| v^{-1}vuw^{-1}w \| \leqslant \| vuw^{-1} \| .$$

L'application $(v, w) \mapsto \Phi_{v,w}$ est évidemment un morphisme de groupes; montrons que cette application envoie $SO(2) \times SO(2)$ sur Γ_1.

Soit $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda z_1, \mu z_2)$ un élément de $\Gamma_1 (|\lambda| = |\mu| = 1)$. Il s'agit de trouver v et w de module 1 tels que $vw^{-1} = \lambda$ et $\overline{vw^{-1}} = \mu$ c'est-à-dire $v^2 = \lambda\mu$ et $w = v\lambda^{-1}$; le problème admet donc deux couples opposés pour solutions.

On en déduit enfin que l'application étudiée applique $O(2) \times O(2)$ sur $S\Gamma$, composante sur composante, selon le schéma suivant:

pour v paire, w impaire: $\Phi_{v,w} \in \pi\Gamma_1$,

pour v impaire, w paire: $\Phi_{v,w} \in \pi\sigma_2\sigma_1\Gamma_1$,

pour v et w impaires: $\Phi_{v,w} \in \sigma_2\sigma_1\Gamma_1$.