

Die Berechnung der Spannungsverluste im vorgespannten Beton

Autor(en): **Birkenmaier, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **70 (1952)**

Heft 45

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-59704>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Berechnung der Spannungsverluste im vorgespannten Beton

Von Dipl. Ing. M. BIRKENMAIER, Zürich

1. Einleitung

In Tragwerken aus vorgespanntem Beton wird bekanntlich die anfänglich aufgebrachte Vorspannkraft im Lauf der Zeit kleiner, da der Beton sich infolge Schwinden und Kriechen verkürzt und da die hochgespannten Stahlarmierungen kriechen. Bei der Bemessung solcher Tragwerke ist es nun wichtig, dass man die Grösse der zu erwartenden Verluste an Vorspannkraft (Spannungsverluste) rechnerisch abschätzen kann, da diese Verluste u. U. beträchtliche Werte annehmen können. Die folgenden Ausführungen, die sich mit der Berechnung solcher Spannungsverluste befassen, beschränken sich auf Konstruktionen, in welche die Vorspannkraft nach dem Erhärten des Betons aufgebracht werden (Vorspannarmierungen mit Endverankerungen mit nachträglichem Verbund) [6] *).

2. Grundlagen

Vorher sollen einige kurze Angaben über das Kriechen und Schwinden des Betons sowie über das Kriechen der Stähle gemacht werden, soweit dies für die spätere Berechnung notwendig ist. Für alle weiteren Einzelheiten wird auf die Literatur verwiesen.

Kriechen des Betons

Wird ein Betonprisma einer langdauernden Druckspannung σ_b unterworfen, so entsteht mit der Zeit eine Zusammendrückung Δl , die ein Vielfaches der rein elastischen Verformung $\Delta l_{el} = \frac{\sigma_b}{E_b} l$ betragen kann. Man nennt diese erst nach Jahren zum Stillstand kommende plastische Verformung das Kriechen des Betons. Meist wird die totale Verformung durch folgende Gleichung dargestellt (Bild 1 [1]):

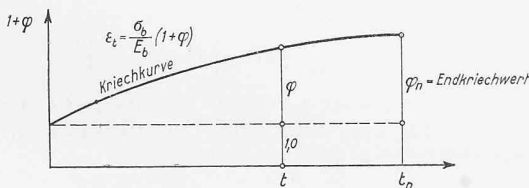


Bild 1. Kriechen des Betons

$$(1) \quad \epsilon_t = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_b}{E_b} (1 + \varphi)$$

ϵ_t = totale spezifische Zusammendrückung zur Zeit t

σ_b = dauernd wirkende Druckspannung

E_b = Elastizitätsmodul des Betons, hier als Konstante angenommen

φ = Kriechwert zur Zeit t

*) Die Zahlen in eckigen Klammern weisen auf das Literaturverzeichnis am Schlusse hin.

Tabelle 1. Kriechen des Betons

nach EMPA-Bericht Nr. 155, Abb. 86 und 87. Beton mit 350 bis 450 kg/m³ hochwertigem PZ, pervibriert, W/Z = 0,35 bis 0,40. Lagerung in 35 % bzw. 70 % relativer Luftfeuchtigkeit.

ϵ_K = spezifisches Kriechmass pro 1 kg/cm² Belastung.

φ_n = Endkriechwert = $\epsilon_K E_b$. $E_b \cong 400\,000$ kg/cm².

W_t = Würfeldruckfestigkeit zur Zeit t .

Alter des Betons beim Aufbringen der Dauerlast	Verhältnis W_t/W_{28}	Spez. Kriechmass ϵ_K	Endkriechwert φ_n
bei 35 % relativer Luftfeuchtigkeit:			
7 Tage	0,80	$0,80 \times 10^{-5}$	3,2
14 Tage	0,91	0,70	2,8
28 Tage	1,00	0,60	2,4
90 Tage	1,28	0,47	1,9
bei 70 % relativer Luftfeuchtigkeit:			
7 Tage	0,80	$0,62 \times 10^{-5}$	2,5
14 Tage	0,91	0,56	2,2
28 Tage	1,00	0,50	2,0
90 Tage	1,28	0,39	1,6

Nach längerer Zeit strebt φ einem Grenzwert φ_n zu. In Gleichung (1) kommt zum Ausdruck, dass die Verformung infolge Kriechen proportional der wirkenden Druckspannung ist, dass also für das Kriechen ebenfalls das Hooksche Gesetz gilt. Diese Annahme wurde durch Versuche von Glanville [1] und der EMPA [2] bestätigt.

Aus Gleichung (1) kann man die in der Zeiteinheit entstehende Kriechverformung durch Differentiation ermitteln.

$$(2) \quad \frac{d\epsilon_t}{dt} = \frac{\sigma_b}{E_b} \frac{d\varphi}{dt}$$

Für die Berechnung der Spannungsverluste interessiert vor allem der Endkriechwert φ_n , der durch Versuche bestimmt werden muss. Auf Tabelle 1 sind einige Endkriechwerte angegeben, die dem EMPA-Bericht Nr. 155 «Vorgespannter Beton» entnommen sind. Man sieht aus diesen Zahlen, dass das Alter des Betons im Moment, wo die Dauerlast aufgebracht wird, und die Lagerbedingungen (35 % relative Feuchtigkeit, das heisst trockene Luft, zum Beispiel in geschlossenen Räumen und 70 % relative Feuchtigkeit, das heisst feuchte Luft, zum Beispiel über Wasser) grossen Einfluss auf den Endkriechwert haben.

Schwinden des Betons

Die Schwindverkürzung des Betons wächst ähnlich dem Kriechen von Null bis zu einem Endwert an. Man kann also den zeitlichen Verlauf der Schwindverkürzung angenähert wie folgt ansetzen:

$$(3) \quad \epsilon_{st} = \epsilon_s \frac{\varphi}{\varphi_n}$$

ϵ_{st} = Schwindverkürzung zur Zeit t

ϵ_s = Endschwindmass

φ = Kriechwert zur Zeit t

φ_n = Endkriechwert

Aus Gleichung (3) erhält man die Schwindverkürzung pro Zeiteinheit.

$$(4) \quad \frac{d\epsilon_{st}}{dt} = \frac{\epsilon_s}{\varphi_n} \frac{d\varphi}{dt}$$

Auf Tabelle 2 sind verschiedene Schwindmass gemäss EMPA-Bericht Nr. 155 angegeben. Für die Berechnung der Spannungsverluste interessiert vor allem das Schwindmass, das vom Moment der endgültigen Vorspannung bis zum Endwert entsteht, daher sind auf Tabelle 2 diese Differenzen auch angegeben.

Kriechen des Stahles

Im vorgespannten Beton werden die hochwertigen Stähle bis zu 60 bis 70 % ihrer Zugfestigkeit vorgespannt, das heisst

Tabelle 2. Schwinden des Betons

nach EMPA-Bericht Nr. 155, Abb. 87

Alter des Betons	Schwindmass z. Zeit t ϵ_{st}	Differenz
		$\epsilon_s = \epsilon_{sn} - \epsilon_{st}$
bei 35 % relativer Luftfeuchtigkeit:		
7 Tage	0,18 %	0,32 %
14 Tage	0,20 %	0,30 %
28 Tage	0,24 %	0,26 %
90 Tage	0,32 %	0,18 %
n Tage (Endwert)	0,50 %	0
bei 70 % relativer Luftfeuchtigkeit:		
7 Tage	0,14 %	0,26 %
14 Tage	0,16 %	0,24 %
28 Tage	0,20 %	0,20 %
90 Tage	0,26 %	0,14 %
n Tage (Endwert)	0,40 %	0

gedehnt und dann in ihrer Länge gehalten (Endanker auf erhärtetem Beton). Durch plastische Verformung (Kriechen des Stahles) verlieren nun die Stähle einen Teil ihrer ursprünglichen Spannung. Die Grösse dieser Verluste hängt stark von der Höhe der Vorspannung ab. Dazu ist die Herstellungsart der Drähte (legiert, vergütet oder gezogen und patentiert) von grossem Einfluss auf ihr Kriechverhalten. Man ist daher für die Beurteilung der Kriechverluste auf Versuche des Lieferwerkes angewiesen.

Auf Tabelle 3 sind einige Versuchswerte über Kriechen von verschiedenen Stählen angegeben, wobei Vorspannungen zwischen 60 und 80 % der Zugfestigkeit vorkommen. Die Zahlen zeigen, dass gezogene, patentierte Drähte höhere Kriechverluste haben als vergütete oder legierte Stähle. Die Kriechverluste können im allgemeinen stark verringert werden, wenn man die Drähte über die spätere Vorspannung hinaus vorreckt und dann auf das gewünschte Mass wieder entspannt. Das Kriechen der Drähte klingt schon nach wenigen Tagen praktisch vollständig ab, erstreckt sich also nicht wie das Schwinden und Kriechen des Betons auf Jahre. Man kann daher angenähert das Kriechen des Stahles von der mechanisch erzeugten Vorspannkraft in Abzug bringen und dann mit der reduzierten Kraft den Einfluss des Kriechens und Schwindens des Betons weiter verfolgen.

3. Spannungsverluste in einer zentrisch vorgespannten Säule

Wir betrachten gemäss Bild 2 eine zentrisch vorgespannte Säule, die durch eine äussere Normalkraft P (Dauerlast) beansprucht sei. Die anfänglich (Zeit $t = 0$) aufgebrachte Vorspannkraft sei mit V bezeichnet. Durch Schwinden und Kriechen des Betons wird die Vorspannkraft V um die noch unbekannte Kraft X auf $(V - X)$ abgebaut. Die Kraft X lässt sich aus der Bedingung bestimmen, dass pro Zeiteinheit die Verkürzung des Stahles gleich derjenigen des Betons sein muss. Dabei ist zu beachten, dass sich in der Zeiteinheit die Vorspannkraft um dX/dt verringert.

$$\frac{1}{E_e F_e} \frac{dX}{dt} = \frac{\epsilon_s}{q_n} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{(V + P - X)}{E_b F_b} \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{E_b F_b} \frac{dX}{dt}$$

Auf der linken Seite steht die Verkürzung des Stahles infolge Abnahme der Vorspannkraft um dX/dt ; auf der rechten Seite zuerst die Schwindverkürzung (Gleichung 4), dann die Kriechverkürzung (Gleichung 2) infolge der im betrachteten Zeitpunkt vorhandenen Dauerlast $(V + P - X)$ und zuletzt die elastische Rückfederung des Betons durch die Kraftabnahme $-dX/dt$. Es wurde im übrigen angenommen, dass die Kraft dX/dt als nur vorübergehend wirkende Kraft keinen Kriechbeitrag liefert.

Durch Multiplikation mit $E_b F_b$ und Zusammenziehen der entsprechenden Glieder wird:

$$\left(\frac{E_b F_b}{E_e F_e} + 1 \right) \frac{dX}{dt} = \left(V + P + \frac{\epsilon_s}{q_n} E_b F_b - X \right) \frac{d\varphi}{dt}$$

mit den Abkürzungen

$$n = \frac{E_e}{E_b} \quad \mu = \frac{F_e}{F_b}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{E_b F_b}{E_e F_e} + 1 = \frac{E_b F_b + E_e F_e}{E_e F_e} = \frac{1 + n\mu}{n\mu}$$

Tabelle 3. Kriechen des Drahtes

β_z = Zugfestigkeit, λ = Bruchdehnung, $\Delta\sigma_v$ = Spannungsverlust infolge Kriechen des Stahles, I bzw. II = Kriechversuch mit konstanter Länge bzw. konstanter Last, σ_s = Streckgrenze 2%, σ_v = Vorspannung im Draht. Die Werte in Klammern beziehen sich auf einen Draht, der zuerst auf 95 kg/mm² vorgereckt wurde.

Bezeichnung	Herstellungsart	ϕ mm	β_z kg/mm ²	σ_s kg/mm ²	λ %	σ_v kg/mm ²	$\Delta\sigma_v$ kg/mm ²	$\Delta\sigma_v/\sigma_v$ %	Versuchsart	Literatur
Sandvik	gezogen, pat.	3,2	190	168	7,0	120	4,5	3,8	II	[2]
Voco	gezogen, pat.	4,0	181	158	6,6	126	7,8	4,1	I	—
Frankreich	gezogen, pat.	5,0	163	130	9,5	108	4,0	3,7	I	[4]
Frankreich	gezogen, pat.	5,0	154	125	6,6	110	6,0	5,5	I	[4]
Belgien 5-I	gezogen, pat.	5,0	150	115	8,0	85	10,0 (3,0)	11,8 (3,5)	I	[3]
Sigma 145/165	vergütet	5,0	165	145	6,0	110	1,0	0,9	II	[5]
Sigma 55/85	legiert	18,3	85	55	10,0	50	0,7	1,4	II	[5]
Sigma 60/90	legiert	18,3	90	60	8,0	50	0,6	1,2	II	[5]

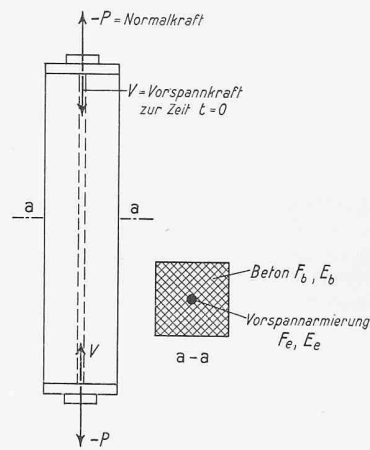


Bild 2. Zentrisch vorgespannte Säule

$$z = \frac{n\mu}{1 + n\mu}$$

$$K = V + P + \frac{\epsilon_s}{q_n} E_b F_b$$

wird:

$$\frac{1}{z} \frac{dX}{dt} = (K - X) \frac{d\varphi}{dt}$$

oder:

$$\frac{1}{K - X} \frac{dX}{dt} = z \frac{d\varphi}{dt}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung gibt

$$\ln(K - X) = -z\varphi + c$$

Die Konstante c bestimmten wir aus den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \varphi = 0, X = 0, \text{ zu } c = \ln K$$

Damit

$$\ln(K - X) = -z\varphi + \ln K$$

oder

$$\ln \frac{K - X}{K} = -z\varphi$$

oder mit Einführung der Exponentialfunktion statt dem natürlichen Logarithmus.

$$K - X = K e^{-z\varphi}$$

$$X = K [1 - e^{-z\varphi}]$$

oder wenn für K der entsprechende Ausdruck eingesetzt wird.

$$(5) \quad X = \left[V + P + \frac{\epsilon_s}{q_n} E_b F_b \right] [1 - e^{-z\varphi}]$$

Führt man noch statt der Kräfte die entsprechenden Spannungen ein, unter Beachtung, dass Druckspannungen positiv und Zugspannungen negativ sind, so wird:

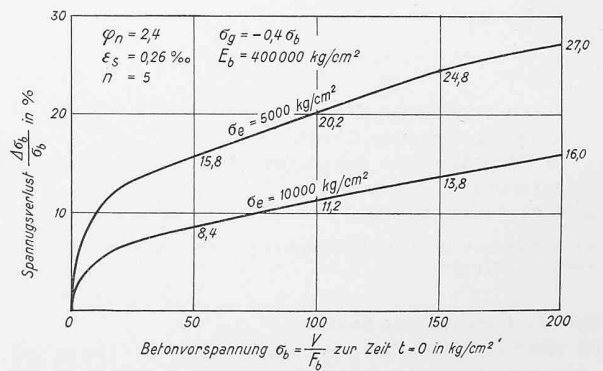


Bild 3. Beispiel für Spannungsverluste in zentrisch vorgespannter Säule

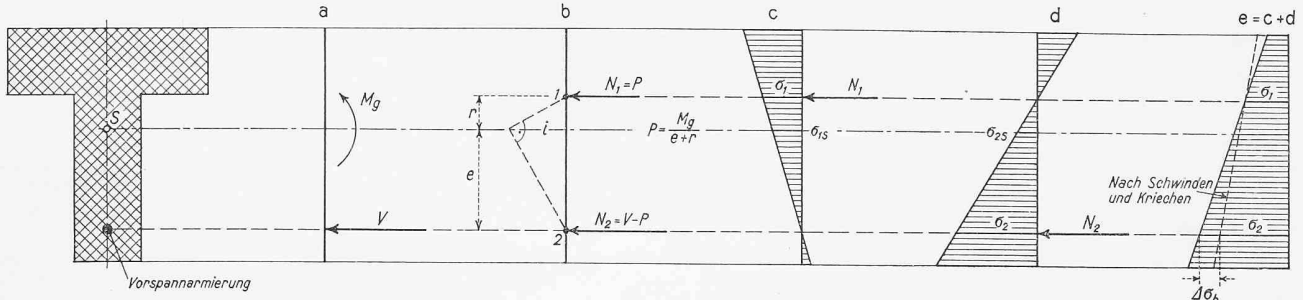


Bild 4. Spannungsverluste in vorgespanntem Balken

$i^2 = J_b/F_b$ $J_b = \text{Trägheitsmoment}$
 $i^2 = e r$ $F_b = \text{Fläche}$
 $r = i^2/e$

$$\sigma_1 = \sigma_{1s} \frac{e+r}{e} \quad \sigma_2 = \sigma_{2s} \frac{e+r}{r}$$

$$\sigma_{1s} = \frac{N_1}{F_b} \quad \sigma_{2s} = \frac{N_2}{F_b}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{P}{F_1} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{V-P}{F_2}$$

$$F_1 = F_b \frac{e}{e+r} \quad F_2 = F_b \frac{r}{e+r}$$

$$\sigma_b = + \frac{V}{F_b} = \text{Druckvorspannung im Beton zur Zeit } t = 0$$

$$\Delta\sigma_b = - \frac{X}{F_b} = \text{Spannungsverlust im Beton}$$

$$\sigma_g = + \frac{P}{F_b} = \text{Spannung infolge Normalkraft } P$$

$$\sigma_e = - \frac{V}{F_e} = \text{Zugspannung im Stahl zur Zeit } t = 0$$

$$\Delta\sigma_e = + \frac{X}{F_e} = \text{Spannungsverlust im Stahl}$$

$$\mu = \frac{F_e}{F_b} = \frac{-V/\sigma_e}{V/\sigma_b} = - \frac{\sigma_b}{\sigma_e}$$

$$z = \frac{n\mu}{1+n\mu} = \frac{n\sigma_b}{n\sigma_b - \sigma_e}$$

somit, wenn Gleichung (5) durch F_b dividiert wird:

$$(6) \quad \Delta\sigma_b = - \left[\sigma_b + \sigma_g + \frac{\epsilon_s E_b}{\varphi_n} \right] \left[1 - e^{-z\varphi} \right]$$

oder auch

$$(6a) \quad \frac{\Delta\sigma_b}{\sigma_b} = - \left[1 + \frac{\sigma_g}{\sigma_b} + \frac{\epsilon_s E_b}{\varphi_n \sigma_b} \right] \left[1 - e^{-z\varphi} \right]$$

Analog erhält man den Spannungsverlust im Stahl, da

$$(7) \quad \frac{\Delta\sigma_e}{\sigma_e} = - \frac{\Delta\sigma_b}{\sigma_b}$$

Damit haben wir die für die Berechnung der Spannungsverluste notwendigen Gleichungen gewonnen. Solche Gleichungen wurden zuerst von Dischinger [1] für ähnliche Kriechaufgaben abgeleitet. Man sieht, dass die Spannungsverluste infolge Kriechen und Schwinden nur von den entsprechenden Endwerten und nicht vom Verlauf der Kriechkurve abhängen. Zahlenwerte der Funktion $[1 - e^{-z\varphi}]$ sind auf Tabelle 4 angegeben.

Zahlenbeispiel:

Alter des Betons beim Vorspannen 28 Tage; relative Luftfeuchtigkeit 35%; $\epsilon_s = 0,26\%$, $\varphi = \varphi_n = 2,4$, $E_b = 400\,000$ kg pro cm^2 , $n = 5$, $\sigma_b = 200$ kg/ cm^2 , $\sigma_g = -80$ kg/ $\text{cm}^2 = 0,4 \sigma_b$. $\sigma_e = -5000$ bzw. $-10\,000$ kg/ cm^2 (nach Abzug des Kriechens der Drähte). Man erhält aus Gleichung (6a) bei $\sigma_e = -5000$ kg pro cm^2 $\frac{\Delta\sigma_b}{\sigma_b} = 0,270$, das heisst 27% Verlust; bei $\sigma_e = -10\,000$ kg/ cm^2 wird $\frac{\Delta\sigma_b}{\sigma_b} = -0,160$, d. h. 16% Verlust.

Tabelle 4. Funktionswerte $[1 - e^{-z\varphi}] = \mathfrak{F}$

$z\varphi$	\mathfrak{F}	$z\varphi$	\mathfrak{F}	$z\varphi$	\mathfrak{F}	$z\varphi$	\mathfrak{F}
0,01	0,010	0,10	0,095	0,20	0,181	0,30	0,259
0,02	0,020	0,11	0,104	0,21	0,189	0,31	0,267
0,03	0,030	0,12	0,113	0,22	0,197	0,32	0,274
0,04	0,039	0,13	0,122	0,23	0,205	0,33	0,282
0,05	0,049	0,14	0,131	0,24	0,213	0,34	0,288
0,06	0,058	0,15	0,139	0,25	0,221	0,35	0,295
0,07	0,068	0,16	0,148	0,26	0,229	0,36	0,302
0,08	0,077	0,17	0,156	0,27	0,237	0,37	0,309
0,09	0,086	0,18	0,165	0,28	0,244	0,38	0,316
0,10	0,095	0,19	0,173	0,29	0,252	0,39	0,323
		0,20	0,181	0,30	0,259	0,40	0,330

Berechnet man die Spannungsverluste unter der vereinfachenden Annahme, dass die Spannung $(\sigma_b + \sigma_g)$ während des ganzen Kriechvorganges konstant bleibe, so erhält man für obiges Beispiel Verluste von 39% bei $\sigma_e = -5000$ kg/ cm^2 und 20% bei $\sigma_e = -10\,000$ kg/ cm^2 . Man sieht also, dass diese häufig gebrauchte Näherung beträchtlich grössere Werte liefert als die genaue Rechnung. Auf Bild 3 sind noch die Spannungsverluste für verschiedene Werte von σ_b für obiges Beispiel aufgetragen. Die Kurven zeigen deutlich, dass die relativen Verluste um so geringer sind, je höher die Stahlvorspannung gewählt wird.

4. Spannungsverluste in einem vorgespannten Balken

Gemäss Bild 4a wirke in einem beliebigen Schnitt eines Balkens zur Zeit $t = 0$ eine exzentrische Vorspannkraft V (Abstand e von s) sowie ein Moment M_g aus Dauerlast. Wir wollen nun die Berechnung der Spannungsverluste im Balken auf den einfachsten Fall der zentrisch vorgespannten Säule zurückführen [7].

Wir konstruieren (Bild 4b) zum Angriffspunkt 2 der Vorspannkraft V den entsprechenden Punkt 1, dessen Abstand vom Schwerpunkt s sich aus der Beziehung $r = i^2/e$ ($i = \text{Trägheitsradius}$) berechnet. Dieser Punkt 1 ist bekanntlich der Spannungsnullpunkt für eine in 2 angreifende Normalkraft. Umgekehrt gibt eine in 1 angreifende Normalkraft in 2 die Spannung Null. Wir zerlegen nun das Moment M_g in ein Kräftepaar $P = \pm \frac{M_g}{e+r}$, welches in den Punkten 1 und 2 angreift.

Statt V und M_g kann man also zwei Normalkräfte $N_1 = \frac{M_g}{e+r}$

sowie auch $N_2 = V - \frac{M_g}{e+r}$ auf den Querschnitt wirkend an-

nehmen. Wir berechnen für die beiden Normalkräfte N_1 und N_2 getrennt die zugehörigen Normalspannungen σ_1 und σ_2 in den Punkten 1 und 2 und können dann die resultierenden Spannungen durch geradliniges Verbinden von σ_1 und σ_2 gewinnen (Bilder 4c bis 4e). Man erhält dabei die Spannungen $\sigma_1 = N_1/F_1$ [$F_1 = F_b e/(e+r)$] und $\sigma_2 = N_2/F_2$ [$F_2 = F_b r/(e+r)$] wie bei einer zentrisch belasteten Säule, indem man die Querschnittsfläche F_b in die beiden Teilflächen F_1 und F_2 zerlegt. Die Spannungen σ_1 und σ_2 haben die Eigenschaft, dass sie sich gegenseitig nicht beeinflussen, da sie ja in den entsprechenden Nullpunkten 1 und 2 liegen. Diese Eigenschaft bleibt auch erhalten, wenn infolge Kriechen und Schwinden die Normalkraft $N_2 = V + P$ sich um X verkleinert. Schreiben wir nämlich wieder die Kriechgleichung auf, indem wir die Gleichheit der Verformung von Stahl und Beton pro Zeiteinheit in der Höhe der Armierung formulieren, so wird:

$$\frac{1}{E_s F_e} \frac{dX}{dt} = \frac{\epsilon_s}{\varphi_n} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{V-X}{E_b F_b} \left(1 + \frac{F_b}{J_b} e^2 \right) \frac{d\varphi}{dt} - \frac{M_g}{E_b J_b} e \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{E_b F_b} \left(1 + \frac{F_b}{J_b} e^2 \right) \frac{dX}{dt}$$

oder wenn $\frac{J_b}{F_b} = i^2$, $\frac{i^2}{e} = r$

