# §3. Traces des algèbres de Hecke

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

PROPOSITION 2-4. *L'algèbre $H_n$ est un k-module libre de base $S_n$.*

*Démonstration.* Soit $p \leqslant n$ un entier strictement positif. Notons, pour tout $i$ compris entre 1 et $p$ (au sens large), $\tau_i$ l'élément $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2} \dots \sigma_i$. Il est facile de vérifier les formules suivantes:

$$\forall i \leqslant p, \forall j < p, \tau_i \sigma_j = \begin{cases} \sigma_j \tau_i & \text{si} \quad j < i - 1 \\ \tau_j & \text{si} \quad j = i - 1 \\ \alpha\tau_i - \beta\tau_{i-1} & \text{si} \quad j = i \\ \sigma_{j-1}\tau_i & \text{si} \quad j > i\,. \end{cases}$$

Il en résulte que le sous-module de $H_n$ engendré par $S_n$ est stable par multiplication à droite par tous les générateurs $\sigma_i$ de $H_n$, ce qui prouve que $H_n$ est engendré linéairement par $S_n$.

Soit maintenant $\varphi$ l'application de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, de support $\{1, 2, \dots, n\}$ et qui vaut 1 sur son support. Le $K$-module $M(\varphi)$ est alors isomorphe à l'anneau du groupe symétrique $K[\mathfrak{S}_n]$. Soit $f_0$ l'inclusion de $\{1, \dots, n\}$ dans $\mathbf{Z}$. La multiplication à droite par $f_0$ induit une application $K$-linéaire $\gamma$ de $H_n \otimes K$ dans $M(\varphi)$. Si l'on tensorise ces modules par $\mathbf{Z}$ au-dessus de $K$, via le morphisme de $K$ dans $\mathbf{Z}$ qui envoie $\lambda$ et $\mu$ en 1 et $-1$, $H_n \otimes \mathbf{Z}$ devient $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$ ainsi que $M(\varphi)$ et $\gamma$ devient l'identité. On en déduit que $\gamma(S_n)$ est une base de $M(\varphi) \otimes \mathbf{Z}$ et un système libre de $M(\varphi)$. Ce qui prouve que $S_n$ est une base de $H_n$.

COROLLAIRE 2-5. *Pour tout entier $n > 0, H_n$ est un $H_{n-1}$-module à gauche libre de base $\Sigma_n = \{1, \sigma_{n-1}, \dots, \sigma_{n-1}\sigma_{n-2} \dots \sigma_1\}$.*

COROLLAIRE 2-6. *Pour tout $n > 0, H_{n+1}$ est un $H_n$-bimodule isomorphe à $H_n \oplus H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n$.*

*Démonstration.* L'isomorphisme provient de la stabilisation $i$ de $H_n$ dans $H_{n+1}$ et de l'application de $H_n \times H_n$ dans $H_{n+1}$ qui à $(u, v)$ associe $i(u)\sigma_n i(v)$. L'application qui s'en déduit respecte les bases (pour la structure le $H_n$-module à gauche). C'est donc un isomorphisme.

## § 3. TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE

Soit $n > 0$ un entier. Via la stabilisation $i$ de $H_n$ dans $H_{n+1}, H_{n+1}$ est un $H_n$-bimodule. On peut donc considérer le module $E_n = H_0(H_n, H_{n+1})$, quotient de $H_{n+1}$ par le sous-module engendré par les éléments de la forme:

$$ax - xa\,, \qquad a \in i(H_n)\,, \qquad x \in H_{n+1}\,.$$

Comme précédemment, le produit $\times$ induit un produit associatif de $\Lambda_p \otimes E_q$ dans $E_{p+q}$ et $E$ est un $\Lambda$-module gradué.

PROPOSITION 3-1. *L'application qui, à tout élément* $x \in H_n$, *associe l'élément* $(x \times 1_1)\sigma_n$ *de* $H_{n+1}$, $1$ *étant l'unité de* $H_1$, *induit pour tout* $n > 0$ *une application de* $E_{n-1}$ *dans* $E_n$. *Cette application sera notée* $\theta$.

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que $\sigma_n \in H_{n+1}$ commute avec tout élément stabilisé d'un élément de $H_{n-1}$.

*Notations* 3-2. On désignera par $s_0$ la classe de $1 \in H_1$ et, pour tout $n > 0$, on posera

$$s_n = \theta(s_{n-1})\,.$$

L'application quotient de $E_n$ dans $\Lambda_{n+1}$ sera notée $f$; $f$ est une forme $\Lambda$-linéaire surjective, et l'on a: $\forall n \geqslant 0$, $f(s_n) = c_{n+1}$.

PROPOSITION 3-3. $E$ *est un* $\Lambda$*-module libre de base* $\{s_0, s_1, s_2 \ldots\}$.

*Démonstration.* D'après le corollaire 2-6, on a

$$E_n = \Lambda_n \oplus H_0(H_n, H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n)\,.$$

Il n'est pas difficile de montrer que l'application de $H_n \otimes H_n$ dans $H_n$ qui à $u \otimes v$ associe $vu$ induit un isomorphisme de $H_0(H_n, H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n)$ sur $H_0(H_{n-1}, H_n) = E_{n-1}$. Ce qui montre que l'application de $\Lambda_n \oplus E_{n-1}$ dans $E_n$, qui à $u \oplus v$ associe $us_0 + \theta(v)$, est un isomorphisme.

On en déduit, par récurrence sur $n$, la formule

$$E_n = \Lambda_n s_0 \oplus \Lambda_{n-1} s_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_0 s_n\,,$$

ce qui montre le résultat cherché.

LEMME 3-4. *L'algèbre* $\Lambda$ *est engendrée par les éléments* $c_i, i > 1$.

*Démonstration.* La formule

$$E_n = \Lambda_n s_0 \oplus \Lambda_{n-1} s_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_0 s_n$$

montre que $\Lambda_{n+1}$ est engendré par les sous-modules $\Lambda_{n-i} c_{i+1}$, pour $i$ variant de 0 à $n$. Comme ceci a lieu pour tout $n > 0$, on en déduit le résultat.

LEMME 3-5. *L'algèbre* $\Lambda$ *est commutative.*

*Démonstration.* Soient $\sigma$ et $\tau$ deux tresses. Comme les tresses $\sigma \times \tau$ et $\tau \times \sigma$ sont clairement conjuguées, les traces de $\sigma$ et de $\tau$ commutent dans $\Lambda$. Comme de plus les classes $c_i$ proviennent de tresses, $\Lambda$ est commutatif.

Soit $\varphi$ une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$ à support fini. Le module $M(\varphi)$ (voir § 2) est un module libre de dimension fini sur l'anneau $K = \mathbf{Z}[\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \mu^{-1}]$ et l'algèbre $H_n$ ($n$ étant égal au poids de $\varphi$) agit sur $M(\varphi)$. Pour tout élément $u$ de $H_n$ on notera $t_\varphi(u)$ la trace de l'endomorphisme de $M(\varphi)$ induit par la multiplication par $u$. Comme $t_\varphi$ est linéaire et prend la même valeur en $uv$ qu'en $vu$, $t_\varphi$ induit une application linéaire $T_\varphi$ de $\Lambda_n$ dans $K$ que l'on prolongera par 0 sur tous les modules $\Lambda_p$, $p \neq n$. Ainsi, l'application $T_\varphi$ est une application $k$-linéaire de $\Lambda$ dans $K$.

LEMME 3-6. *On a la formule:*

$$T_\varphi(c_n) = \lambda^{n-k}(\lambda+\mu)^{k-1}$$

$k$ *désignant le cardinal du support de* $\varphi$.

*Démonstration.* Soit $S$ le support de $\varphi$. C'est une partie de $\mathbf{Z}$ à $k$ éléments. Par définition $M(\varphi)$ a une base $B(\varphi)$ formée des fonctions $f$ de $X_n = \{1, 2, ..., n\}$ dans $S$ telles que pour tout $i$ de $S$, $f$ prend la valeur $i$ exactement $\varphi(i)$ fois. Si l'on munit $M(\varphi)$ d'un produit scalaire $< \, , \, >$ tel que $B(\varphi)$ soit une base orthonormée, on a

$$T_\varphi(c_n) = \sum_{f \in B(\varphi)} <f, s_1 s_2 \dots s_{n-1}(f)> .$$

Soit $f$ un élément de la base $B(\varphi)$. L'élément $s_{n-1}(f)$ est de la forme $af + bf \circ \varepsilon_{n-1}$, $b$ étant supposé nul si $f$ prend les mêmes valeurs en $n$ et en $n-1$. Comme la valeur de $f \circ \varepsilon_{n-1}$ en $n$ n'est pas modifiée après action des éléments $s_i$, $i < n-1$, on a

$$<f, s_1 s_2 \dots s_{n-1}(f)> = a<f, s_1 s_2 \dots s_{n-2}(f)> .$$

Si $f(n-1)$ est strictement inférieur à $f(n)$, $a$ est nul. Sinon $a$ est égal à $\lambda$ ou $\lambda + \mu$ suivant que $f(n-1)$ est égal ou non à $f(n)$. En itérant ce raisonnement de proche en proche, on vérifie la formule

$$<f, s_1 s_2 \dots s_{n-1}(f)> = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i < n \text{ tel que } f(i) < f(i+1) \\ \lambda^p(\lambda+\mu)^q & \text{sinon}, \end{cases}$$

$p$ (resp. $q$) étant égal au nombre d'entiers non nuls $i < n$ tels que $f(i)$ et égal (resp. strictement supérieur) à $f(i+1)$.

Si la suite $f(1), \ldots, f(n)$ est décroissante, $q$ est égal au cardinal de l'image de $f$ diminué d'une unité, et $p$ est égal à $n-1-q$. Comme de plus la base $B(\varphi)$ ne contient qu'une seule fonction décroissante, on vérifie aisément le lemme.

PROPOSITION 3-7. *Soit $\varphi$ une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$ de poids $n = p + q$. Soient $u$ et $v$ deux éléments de $\Lambda_p$ et $\Lambda_q$. Alors on a*

$$T_\varphi(uv) = \sum T_{\varphi'}(u) T_{\varphi-\varphi'}(v),$$

*la sommation ayant lieu sur toutes les fonctions $\varphi'$ de poids $p$, comprises au sens large entre $0$ et $\varphi$.*

*Démonstration.* Désignons par $H_p \times H_q$ l'image par l'application $\times$ de $H_p \otimes H_q$ dans $H_n$. Le module $M(\varphi)$ est isomorphe, en tant que $H_p \times H_q$-module à la somme directe des modules $M(\varphi') \otimes M(\varphi-\varphi')$, $\varphi'$ appartenant à l'ensemble des fonctions de poids $p$ et comprises entre $0$ et $\varphi$. Soient $x$ et $y$ des représentants de $u$ et $v$ dans $H_p$ et $H_q$. Comme la trace de $u \otimes v$ agissant sur $M(\varphi') \otimes M(\varphi-\varphi')$ est égal au produit de la trace de $u$ agissant sur $M(\varphi')$ par la trace de $v$ agissant sur $M(\varphi-\varphi')$, on obtient le résultat cherché.

COROLLAIRE 3-8. *Soit $\varphi$ une fonction à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. Soit $\varepsilon$ une bijection de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$. Alors les formes linéaires $T_\varphi$ et $T_{\varphi \circ \varepsilon}$ sont égales.*

*Démonstration.* D'après le lemme 3-6 $T_\varphi$ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ prennent la même valeur sur les éléments $c_n$ de $\Lambda$. D'après la proposition 3-7, si, pour tout $\varphi$, $T_\varphi$ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ prennent les mêmes valeurs en $u$ et en $v$, elles prennent, pour tout $\varphi$, la même valeur en $uv$. On en déduit que $T_\varphi$ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ sont égales quel que soit $\varphi$.

Il en résulte que $T_\varphi$ ne dépend que de la partition du poids $n$ de $\varphi$ en les nombres $\varphi(p)$. Cette partition est caractérisée par la suite finie $p_1, p_2, \ldots; p_i$ désignant le nombre de fois où $\varphi$ prend la valeur $i$. On notera alors $T_\varphi$ sous la forme $T_u$, où $u$ est le mot $c_1^{p_1} c_2^{p_2} \ldots$ .

## § 4. LA TRACE $T$

Soit $x = (x_i)$ une famille de symboles. On désignera par $A(x)$ l'algèbre des séries en les $x_i$ à coefficients dans $K = \mathbf{Z}[\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \mu^{-1}]$. Un élément de