3. Local inversion

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LEMMA 2.1. *Let* A, B *be metric spaces, with* $A \neq \emptyset$ *and* B *connected. Let* $P: A \to B$ *be a continuous map. Assume:*

(i) P *is open,*

(ii) P *is proper, that is, for any compact subset* K *in* B, $P^{-1}(K)$ *is compact. Then* P *is surjective.*

Proof. We only need to prove that $P(A)$ is closed. Let b_0 be a point in $\overline{P(A)}$. Since B is a metric space, there exists a sequence $(b_i)_{i>0}$ in $P(A)$ converging to b_0. The subset $K = \{b_0, b_1, b_2, ...\}$ is compact, hence so is $PP^{-1}(K)$. The latter contains $b_1, ..., b_i, ...$, hence b_0, and it is obviously contained in $P(A)$. Q.E.D.

In order to make use of this lemma, we shall need some inverse function theorem for (i), and some *a priori* estimates for (ii).

3. LOCAL INVERSION

THEOREM 3.1. *Let* X *be a smooth compact manifold,* V *and* W *smooth vector bundles on* X, U *an open set in* $C^\infty(X, V)$, *and* $P: U \to C^\infty(X, W)$, *a smooth nonlinear elliptic partial differential operator. Let* A *and* B *be LCFC submanifolds of* U *and of* $C^\infty(X, W)$ *respectively, such that the restriction* P_A *of* P *to* A, *sends* A *into* B. *Then the Jacobian criterion holds for* P_A, *namely, if the derivative of* $P_A: A \to B$ *is invertible at* $\varphi_0 \in A$, *then* P_A *is a local diffeomorphism near* φ_0.

This is a convenient variant of the Nash-Moser theorem (e.g. [14]) regarding suitable restrictions of elliptic operators. It is established in a separate paper [11] (see also [22]). It relies only on the *classical* (Banach) inverse function theorem combined with *elliptic regularity*.

Remark 3.2. The Nash-Moser theorem has been studied by many authors, see the bibliography below and further references in [14] [15] [25].

4. PROPERNESS

In view of (2), theorem 3.1 implies that P_λ is open. We want to apply lemma 2.1 in order to prove that P_λ is surjective from A_λ to B_λ. Since $P_\lambda(A_\lambda) \neq \emptyset$ (it contains 0), and since B_λ is connected, this amounts to proving that P_λ is *proper*. Let us explain why *a priori* estimates imply properness.

Concerning subsets in A_λ we have