Ein Satz über räumliche Fünfecke

Autor(en): **Waerden, B.L. van der**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 4

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-27354

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

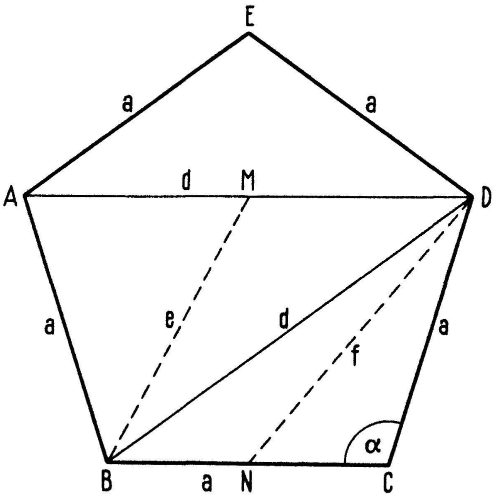
El. Math.	Band 25	Heft 4	Seiten 73-96	10. Juli 1970

Ein Satz über räumliche Fünfecke[1])

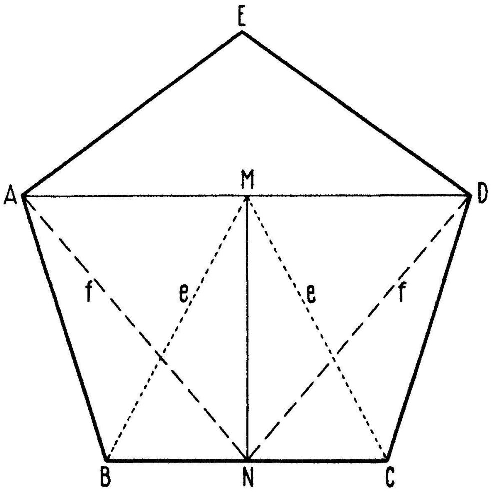
I

Der Satz lautet: *Ein räumliches Fünfeck ABCDE, in dem alle Seiten gleich a und alle Winkel gleich α sind, ist eben.*

Beweis. Ich betrachte a und α als gegeben. Im Dreieck BCD sind jetzt zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, also ist die Diagonale d bekannt: alle Diagonalen sind gleich d.



Figur 1



Figur 2

Im Dreieck ABD sind die drei Seiten bekannt, also ist das Dreieck bis auf eine starre Bewegung eindeutig bestimmt. Also ist auch $BM = e$ bekannt, wo M die Mitte von AD ist. Ebenso ist $DN = f$ bekannt, wo N die Mitte von BC ist.

Weil $MB = MC = e$ ist, liegt M in der mittelsenkrechten Ebene zu BC, also ist $MN \perp BC$. Weil $NA = ND = f$ ist, liegt N in der mittelsenkrechten Ebene zu AD, also ist $MN \perp AD$. Die Gerade MN liegt also in beiden mittelsenkrechten Ebenen.

Nehmen wir nun an, dass $ABCD$ nicht in einer Ebene liegen, so sind die beiden mittelsenkrechten Ebenen verschieden, also ist MN ihre Schnittlinie. Aber auch E liegt in beiden Ebenen, also liegt E auf MN. Die Umdrehung (Zweierdrehung) um MN führt also E in sich, A in D und B in C über. Also gilt:

[1]) Vortrag im Mathematischen Kolloquium Zürich am 10. Februar 1970.

Lemma. Wenn vier von den 5 Punkten, etwa $ABCD$, nicht in einer Ebene liegen, so gibt es eine Zweierdrehung, die E fest lässt und A mit D und B mit C vertauscht.

Wir unterscheiden 3 Fälle:

a) Alle 5 Punkte liegen in einer Ebene. Dann sind wir fertig.
b) Vier von den 5 Punkten, etwa $ABCD$ liegen in einer Ebene, aber E liegt nicht in dieser Ebene.
c) Keine vier von den 5 Punkten liegen in einer Ebene.

Im Fall b) liegt E nicht in der Ebene ABC, also gibt es nach dem Lemma eine Zweierdrehung S, die D fest lässt und E mit C und A mit B vertauscht. Ebenso liegt E nicht in der Ebene BCD, also gibt es eine Zweierdrehung T, die A fest lässt und B mit E und C mit D vertauscht.

Die gleichen Schlüsse gelten im Fall c). Wir können also die Fälle b) und c) zusammen behandeln.

Die Drehung S vertauscht die 5 Ecken nach der Permutation $(AB)(CE)$, die Drehung T nach der Permutation $(CD)(BE)$. Also bewirkt das Produkt $R = S \cdot T$ die zyklische Permutation $(ABCDE)$. Der Schwerpunkt der 5 Punkte geht bei der Bewegung R in sich über, also ist R eine Drehung. Da die 5 Punkte durch die Drehung zyklisch vertauscht werden, liegen sie in einer Ebene senkrecht zur Drehungsachse.

Damit ist die Behauptung in allen drei Fällen bewiesen.

Zusatz. Der Drehwinkel der Drehung R kann nur $\pm 72°$ oder $\pm 144°$ sein. Im ersten Fall ist das Fünfeck ein einfaches reguläres Fünfeck mit dem Winkel $\alpha = 108°$. Im zweiten Fall haben wir ein reguläres Sternfünfeck mit dem Winkel $\alpha = 36°$. Andere Werte von α sind nicht möglich.

II

Ich möchte nun erzählen, wie ich auf den Satz und seinen Beweis gekommen bin, und damit einen weiteren kleinen Beitrag zur Psychologie des mathematischen Denkens liefern[2]).

Kurz vor Weihnachten 1969 besuchten mich zwei Chemiker: A. DREIDING und J. D. DUNITZ. Der letztere erzählte mit einiges über starre und bewegliche Formen von ringförmigen Verbindungen wie Zyklo-Hexan und Zyklo-Oktan. Er erwähnte auch den Fünfring (Zyklo-Pentan) und stellte die Behauptung auf, ein Fünfeck mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln sei notwendig eben. Dreiding und ich waren darüber sehr erstaunt und fragten ihn nach seinen Gründen. Dunitz erklärte uns: «Wenn ich annehme, dass der Fünfring eine Zweierachse oder eine Spiegelung gestattet, dann kann ich beweisen, dass er eben sein muss. Ausserdem behaupte ich, dass die Planarität des allgemeinen Fünfrings mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln aus der Tatsache folgt, dass alle Torsionswinkel bis auf das Vorzeichen gleich sein müssen.»

Nach dieser Bemerkung war es nur natürlich, dass ich bei meinen Beweisversuchen zunächst darauf ausging, die Existenz einer Zweierachse oder einer Spiegelebene zu beweisen.

---

[2]) Vgl. meine Broschüre «Einfall und Überlegung. Drei kleine Beiträge zur Psychologie des mathematischen Denkens». Birkhäuser, Basel 1968.

Sodann zeigte Dunitz uns den Anfang eines Beweises. Er bemerkte zuerst: Wenn a und α gegeben sind, so ist durch die Formel

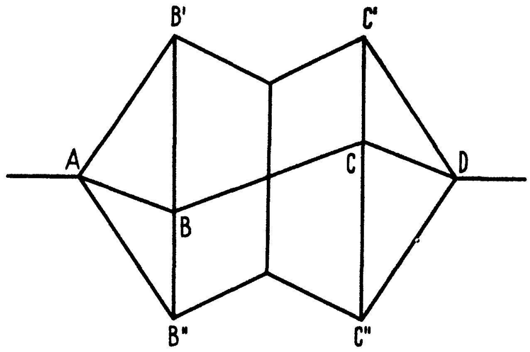
$$d^2 = 2\,a^2 - 2\,a^2 \cos\alpha$$

die Diagonale d bestimmt; alle Diagonalen des Fünfecks sind also gleich.

Der nächste Schritt war die Berechnung der Torsion. Sind $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ drei aufeinanderfolgende Seitenvektoren des Fünfecks, so sind $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ die Normalenvektoren der Ebenen durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bzw. durch $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$. Der Winkel zwischen diesen beiden Ebenen oder, was dasselbe ist, zwischen den Normalenvektoren, ist der Torsionswinkel bei b. Liegen die drei Vektoren in einer Ebene, so ist der Torsionswinkel 0 oder 180°. In jedem Fall kann man d^2 durch den Cosinus des Torsionswinkels β ausdrücken und aus der erhaltenen Formel schliessen, dass $\cos\beta$ durch d^2 eindeutig bestimmt ist. Die 5 Torsionswinkel β sind also alle gleich $\pm\beta_0$, wo β_0 durch a und α eindeutig bestimmt sind. Ist ein Torsionswinkel 0 oder 180°, so sind alle 0 oder 180°, und das Fünfeck ist eben. Geometrisch bedeutet das: Wenn vier von den 5 Ecken in einer Ebene liegen, so liegen alle in einer Ebene.

Diese Ausführungen von Dunitz machten es mir sehr viel leichter, den Beweis zu finden. Ich wusste nun, dass alle Diagonalen gleich sind und alle Torsionen bis auf das Vorzeichen gleich, und ich wusste auch, dass der Fall b), der im obigen Beweis zunächst einige Schwierigkeiten bereitete, in Wirklichkeit gar nicht auftreten kann.

Nach einigen vergeblichen Beweisversuchen hatte ich den Einfall, die Diagonale AD festzuhalten und zu sehen, welche Bewegungsfreiheit der Streckenzug $ABCD$ dann noch hat. Vom Dreieck ABC sind alle drei Seiten a, d, d gegeben, also kann B sich nur noch auf einem Kreis um die Achse AD drehen. In der Figur 3 ist dieser Kreis



Figur 3

in senkrechter Projektion als Strecke $B'B''$ gezeichnet. Ebenso durchläuft C bei der Rotation einen Kreis $C'C''$ um die gleiche Achse AD. Die beiden Kreise liegen in parallelen Ebenen. Das Dreieck ABD beschreibt bei der Rotation einen Doppelkegel, ebenso das Dreieck ACD. Diese beiden Doppelkegel mit Spitzen in A und D sind in der Figur 3 eingezeichnet.

Welche Bewegungsfreiheit hat der Streckenzug $ABCD$? Die Punkte B und C können sich nicht unabhängig voneinander auf ihren Kreisen bewegen, denn die Strecke BC muss die feste Länge a haben. Wird B festgehalten, so gibt es für C jeweils zwei mögliche Lagen, die spiegelbildlich in bezug auf die Ebene ABD liegen. Hat man sich einmal für eine der beiden Lagen entschieden, so ist die einzige Freiheit, die man für den Streckenzug $ABCD$ hat, eine beliebige Drehung um die Achse AD.

Es kann vorkommen, dass der Abstand zwischen den beiden parallelen Kreis ebenen genau a ist. In diesem Fall liegt der ganze Streckenzug $ABCD$ in einer Ebene. Ich wusste schon, dass in diesem Fall das ganze Fünfeck eben ist.

Im anderen Fall kann man den Streckenzug $ABCD$ so weit um AD drehen, bis BC parallel zur Zeichenebene der Figur 3 zu liegen kommt. Diese Lage ist in Figur 3 gezeichnet.

Es ist anschaulich klar, dass in dieser Lage die Figur 3 in der Projektion eine Symmetrie hat. Sie geht nämlich bei der Umdrehung um die Mitte M der Strecke AD in sich über. Für die räumliche Figur bedeutet das, dass sie eine Symmetrieachse g hat, nämlich die Verbindungsgerade MN der Mitten von AD und BC.

Die Symmetrie der Figur in bezug auf die Achse g war für mich, nachdem ich mir die Figur im Raum anschaulich vorgestellt hatte, evident. Sie musste aber noch bewiesen werden. Definiert man g als Verbindungslinie MN, so muss man beweisen, dass g senkrecht zu AD und BC ist oder, was damit äquivalent ist, dass g in den beiden mittelsenkrechten Ebenen zu AD und BC liegt. Es gibt viele Möglichkeiten, diesen Beweis zu führen; eine davon habe ich im Abschnitt I gewählt.

Damit war die Existenz einer Zweierdrehung, die A mit D und B mit C vertauscht, bewiesen. Es war noch zu beweisen, dass diese Zweierdrehung den Punkt E fest lässt, d. h. dass E auf der Drehungsachse liegt. Der Beweis ist leicht: E liegt gleich weit von A und D entfernt und auch gleich weit von B und C, also liegt E in den beiden mittelsenkrechten Ebenen zu AD und BC, also auf deren Schnittlinie g.

Damit war also die Existenz einer Zweierdrehung, die Dunitz als Voraussetzung für seinen Beweis brauchte, gezeigt. Mit derselben Methode erhält man aber nicht nur eine, sondern gleich fünf Umdrehungen. Wer die endlichen Drehungsgruppen kennt, sieht sofort, dass die von diesen 5 Umdrehungen erzeugte Gruppe nur eine Diedergruppe D_5 sein kann. Das Produkt von zwei Umdrehungen aus dieser Gruppe ist eine Fünferdrehung. Sobald man einmal eine Fünferdrehung hat, die die 5 Punkte zyklisch vertauscht, ist es klar, dass sie in einer Ebene senkrecht zur Drehungsachse liegen. Damit waren die Grundgedanken des Beweises gegeben.

Beim Aufschreiben des Beweises tauchten einige kleine Schwierigkeiten auf, die aber leicht behoben werden konnten. Zunächst: wenn die vier Ecken $ABCD$ in einer Ebene liegen, die fünfte Ecke aber nicht, so fallen die beiden mittelsenkrechten Ebenen von AD und BC zusammen. In diesem Fall, den ich anfangs Fall b) genannt habe, gelingt die Konstruktion einer Umdrehung, die E invariant lässt, nicht ohne weiteres. Ich wusste aus der Torsionsüberlegung von Dunitz, dass der Fall b) nicht vorkommen kann, aber ich wollte diese etwas komplizierte Überlegung lieber umgehen. Das war leicht möglich, denn von den 5 Umdrehungen braucht man nur zwei (S und T). Diese lassen sich aber auch im Fall b) ohne weiteres angeben, wie unter I gezeigt wurde.

Eine weitere Schwierigkeit liegt darin, dass das Produkt ST von zwei Drehungen S und T im allgemeinen keine Drehung, sondern eine Schraubung ist. Eine Schraubung würde, öfter wiederholt, das Fünfeck beliebig weit weg bringen. Die Bewegung $R = ST$ führt aber das Fünfeck in sich über, also kann R keine Schraubung sein.

Das einfachste Mittel, zu beweisen, dass R wirklich eine Drehung ist, ist die Betrachtung des Schwerpunktes, der bei R fest bleiben muss. Die Betrachtung des

Schwerpunktes ist ein alter Kunstgriff in der Theorie der endlichen Bewegungsgruppen.

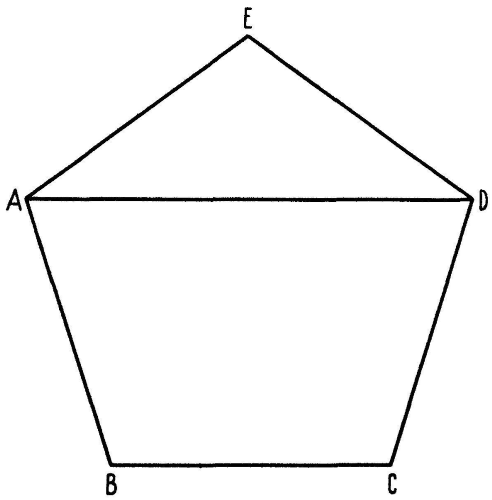
III *Noch einmal: Einfall und Überlegung*

Die Hauptfrage in meiner unter [2]) zitierten Untersuchung «Einfall und Überlegung» war: Wie kann man die bewussten Überlegungen, die ein Mathematiker anstellt, abgrenzen gegen die *Einfälle*, die der Überlegung manchmal plötzlich eine neue Richtung weisen?

In dem Fall, über den ich hier berichtet habe, ist es relativ leicht, die Einfälle aufzuzeigen. Der erste und wichtigste Einfall stammte von Dunitz. Er sagte sich: Wenn ich erst einmal wüsste, dass es eine Zweierachse oder Spiegelebene gibt, so wäre es nachher viel leichter zu beweisen, dass das Fünfeck eben ist.

Durch diesen Einfall war das ursprüngliche Problem in zwei Teilprobleme aufgeteilt, nämlich: zuerst die Existenz einer Zweierachse oder Spiegelebene zu beweisen, sodann von dieser Existenz ausgehend zu beweisen, dass das Fünfeck eben sein muss. Das zweite Teilproblem hatte Dunitz, wie er sagte, schon gelöst. Ich konzentrierte mich also zunächst auf das erste Teilproblem.

Wenn a und α gegeben sind, so sind alle Diagonalen bekannt und untereinander gleich; das hatte Dunitz schon bewiesen. Daraus folgt, dass alle Dreiecke wie ABC und ACD bis auf starre Bewegungen bestimmt sind.



Figur 4

Ich hatte nun den Einfall, die Diagonale AD festzuhalten und zu untersuchen, welche Bewegungsfreiheit das räumliche Fünfeck dann noch hat. Das war der einzige wesentliche Einfall: alles andere war systematische Überlegung auf Grund der Raumanschauung. Das soll jetzt gezeigt werden.

Wenn AD festgehalten wird, zerfällt das Fünfeck von selbst in ein Dreieck ADE, das um AD rotieren kann, und ein Viereck $ABCD$. Welche Bewegungsfreiheit hat das Viereck? Man sieht sofort, dass B und C je einen Kreis durchlaufen. Stellt man sich ihre Bewegungen räumlich vor, so erhält man ohne weitere Einfälle die Figur der beiden Doppelkegel, die in Figur 3 in orthogonaler Projektion gezeichnet ist.

Mein Ziel war von vornherein die Konstruktion einer Zweierdrehung oder einer Spiegelung. Dass die Figur 3 keine Spiegelung gestattet, ist klar. Also suchte ich eine

Zweierdrehung und fand sie auch sofort: die Drehungsachse ist die Verbindungslinie MN der Mitten von AD und BC, die sich in Figur 3 als Punkt projiziert. Dass MN eine Symmetrieachse der Figur ist, war mir anschaulich evident.

Zwei kleine Aufgaben blieben übrig. Zunächst musste ich beweisen, dass $MN \perp AD$ und $MN \perp BC$ ist. Wenn man in der Raumgeometrie beweisen will, dass zwei Geraden senkrecht sind, so macht man das häufig so, dass man zeigt, dass die eine in einer Ebene senkrecht zur anderen liegt. Ich dachte mir also eine Ebene durch M senkrecht zu AD. Ich hatte zu zeigen, dass nicht nur M, sondern auch N in dieser Ebene liegt. Die Ebene durch die Mitte M senkrecht zu AD ist der Ort aller Punkte, die von A und D gleich weit entfernt sind; also hatte ich nur noch $NA = ND$ zu beweisen und ebenso $MB = MC$. Der Beweis war leicht.

So erhielt ich ohne neue Einfälle eine Zweierdrehung, die A in D und B in C überführt. Nun war noch zu zeigen, dass E auf der Drehungsachse liegt, also bei der Drehung fest bleibt. Wie schon erwähnt, folgt diese Behauptung sofort aus der Tatsache, dass E gleich weit entfernt ist von A und D und ebenso von B und D.

Der Rest des Beweises ergab sich ganz von selbst ohne neue Einfälle, wie unter II gezeigt wurde.

B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich

Triangular Covers for Closed Curves of Constant Length

1. We call a compact, convex (plane) set S a *translation* [*displacement*] *cover* for the family $\mathfrak{C}$ of all closed (plane) curves of fixed length L if for each curve $\Gamma \in \mathfrak{C}$ there is a translation τ [displacement[1]) δ] such that $\tau(\Gamma) \subseteq S$ [$\delta(\Gamma) \subseteq S$]. In this note we describe the triangular translation and displacement covers for $\mathfrak{C}$ of prescribed shape that have least area.

It is a consequence of our results that the smallest triangular translation cover and the smallest triangular displacement cover are both equilateral, the first with side $2L/3$ and the second with side $L\sqrt{3}/\pi$.

Along the way we obtain a sharpened version of a theorem of H. G. EGGLESTON's on the thickness of a triangle that is circumscribed about a curve in $\mathfrak{C}$ and similar inequalities for the diameter and area of such triangles.

The translation theory, which depends on a well-known property of the orthic triangle, is developed in section 2. The displacement theory depends on an inequality of Eggleston's and is summarized in section 3.

2. We begin by recalling some formulas from the trigonometry of triangles. Let p, h_a, t, d, T, r and q be the perimeter, altitude to side a, thickness (minimal altitude), diameter (maximal side), area, inradius, and the perimeter of the orthic (pedal) triangle, respectively, of a triangle (ABC). Then

$$a = p\,\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}, \qquad h_a = p\,\frac{\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma},$$

1) A *displacement*, also called a rigid motion, is an orthogonal map of the plane that preserves orientation. For details see [5; 32].