

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.05.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

Kegel 2. Ordnung. Eine spezielle Kummersche Konfiguration bilden die 12 Ecken des Kubooktaeders  $\Pi_3$  zusammen mit den Fernpunkten  $F_1, F_2, F_3, F_4$  der 4 Flächenachsen des Oktaeders. Die Ebenen dieser Konfiguration ergeben sich so: a) Von jeder Ecke von  $\Pi_3$  gehen 4 Kanten aus, deren Endpunkte bilden eine Konfigurationsebene  $\varepsilon$ , in der auch zwei Punkte  $F_i$  liegen; das sind 12 Ebenen  $\varepsilon$ . b) Die zu zwei parallelen Dreiecksflächen von  $\Pi_3$  parallele Ebene durch  $M$  ist ebenfalls eine Konfigurationsebene  $\varepsilon$ ; das sind die restlichen 4 Ebenen  $\varepsilon$ . Jede dieser 4 Ebenen schneidet  $\Pi_3$  nach einem regelmässigen Sechseck, und das zeigt, dass der «charakteristische Sechserwurf» dieser speziellen Kummerschen Konfiguration der eines regelmässigen Sechsecks ist.

Je zwei Punkte  $P$  haben als Verbindungsgerade eine «Diagonale» der Kummerschen Konfiguration. Es gibt  $16 \cdot 15/2 = 120$  Diagonalen, sie verteilen sich auf a) die 24 Kanten von  $\Pi_3$ , b) die 12 Diagonalen der 6 Quadrate von  $\Pi_3$ , c) die 30 Raumdiagonalen von  $\Pi_3$ , d) die 6 Ferngeraden durch je zwei Punkte  $F_i$ , e) die 24 Geraden, die in den Ecken jeder Dreiecksfläche von  $\Pi_3$  auf dieser Fläche normal stehen, und schliesslich f) die 24 Kantenlote des Oktaeders. Kurz gesagt: *Die 12 Mittelpunkte und die 4 Fernpunkte der Kantenlote eines regulären Oktaeders bilden die 16 Punkte einer Kummerschen Konfiguration. Die Kantenlote sind 24 von den 120 Diagonalen dieser Konfiguration.*

FRITZ HOHENBERG, Graz

## Kleine Mitteilungen

### Ein Satz über Matrixeigenwerte

Die Eigenwerte einer hermiteschen, schiefhermiteschen bzw. unitären Matrix sind reell, rein imaginär (oder 0) bzw. vom Betrage 1. Diese drei wohlbekanntesten Aussagen, die man üblicherweise gesondert beweist, sind bemerkenswerterweise Sonderfälle eines einzigen Satzes, der sich sehr leicht ergibt und auch noch weitere Anwendungen hat.

**Satz.** Genügen eine quadratische Matrix  $A$  und ihre konjugiert Transponierte  $A^*$  einer Beziehung der Form

$$f(A, A^*) = 0 \quad (1)$$

mit

$$f(A, A^*) = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu} A^{*\mu} A^{\nu}, \quad (2)$$

so gehören die Eigenwerte von  $A$  der durch

$$f(z, \bar{z}) = 0 \quad (3)$$

dargestellten Menge komplexer Zahlen an.

*Beweis.*  $x$  sei ein Eigenvektor zu einem Eigenwert  $\lambda$  von  $A$ . Dann ist

$$A x = \lambda x, \quad A^{\nu} x = \lambda^{\nu} x, \quad x^* A^{*\mu} = \bar{\lambda}^{\mu} x^* \quad (x^* = \bar{x}^T),$$

also wegen (1) und (2) auch

$$0 = x^* f(A, A^*) x = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu} x^* A^{*\mu} A^\nu x = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu} \bar{\lambda}^\mu \lambda^\nu x^* x = x^* x f(\lambda, \bar{\lambda}) .$$

Da  $x$  ein Eigenvektor ist, gilt  $x^* x \neq 0$ , und der Satz ist schon bewiesen.

Für normale Matrizen ( $A A^* = A^* A$ ) folgt der Satz auch aus einem bekannten Ergebnis von G. FROBENIUS (Satz 16.1 in C. C. MacDuffee, *The Theory of Matrices*, Springer, Berlin 1933), weil die Nullmatrix  $f(A, A^*)$  in (1) den Eigenwert 0 hat.

$f(z, \bar{z}) = \bar{z} - z$  bzw.  $\bar{z} + z$  bzw.  $\bar{z} z - 1$  liefert nun die ganz zu Anfang genannten Aussagen.

Weitere Anwendungsbeispiele sind:

1. Ist  $A^* = c A$  ( $A \neq 0$ ), so muss  $c = e^{i\alpha}$  sein, und die Eigenwerte von  $A$  liegen auf der Geraden  $z(t) = t e^{-i\alpha/2}$ .

2. Ist  $B^* B = B^* + B$ , so liegen die Eigenwerte von  $B$  auf dem Kreis  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ .

3. Es gibt keine quadratische Matrix  $C$  mit  $C^* C = -I$ .

4.  $\tilde{A} = K^{-1} A^* K$  ( $A$  quadratisch,  $K$  definit hermitesch) heisst  $K$ -Adjungierte von  $A$  (vgl. M. C. Pease, *Methods of Matrix Algebra*, Academic Press, New York 1965). Genügen  $A$  und  $\tilde{A}$  einer Beziehung  $f(A, \tilde{A}) = 0$  mit  $f$  wie in (2), so gehören die Eigenwerte von  $A$  der durch  $f(z, \bar{z}) = 0$  gegebenen Menge an. ERWIN KREYSZIG, Universität Düsseldorf

### An Elementary Proof of Tucker's Theorem

1. Mr. TUCKER gave the following interesting

**Theorem.** *In a triangle, its circumcenter and symmedian point are collinear with the orthocenter of its pedal triangle.*

This can be proved by means of the trilinear coordinates. We will give here a proof by Plane Geometry.

2. Let there be given a triangle  $ABC$ . Let  $O, G$  and  $H$  be its circumcenter, centroid, and orthocenter, respectively. We designate by  $A', B', C'$  the feet of the altitudes, perpendicular to the sides from the opposite vertices  $A, B, C$ , and by  $H'$  the orthocenter of the pedal triangle  $A'B'C'$ .

At first, we state a number of lemmas. Some of them will be found in any book on the Plane Geometry, and their proofs may be omitted. We refer, e.g., to NATHAN ALTSHILLER-COURT'S «*College Geometry*».

**Lemma 1** [1]. *The orthocenter  $H$  is the incenter, or the excenter, of the triangle  $A'B'C'$ .*

We take here the case of incenter only, but the case of excenter can be analogously treated.

**Lemma 2.**  *$O, G$  and  $H$  are collinear, and there holds*

$$HG:GO = 2:1 . \tag{1}$$

The line  $OHG$  is called the Euler line.

**Lemma 3.** *Let  $A_1, B_1, C_1$  be the mid-points of  $B'C', C'A', A'B'$ , respectively, and  $G_1, I_1$  be the centroid, the incenter of the triangle  $A_1B_1C_1$ . Then, two triangles  $A'B'C'$  and  $A_1B_1C_1$  are in homothetic position, with  $G_1$  as the homothetic center. Hence three points  $H, I_1, G_1$  are collinear, and*

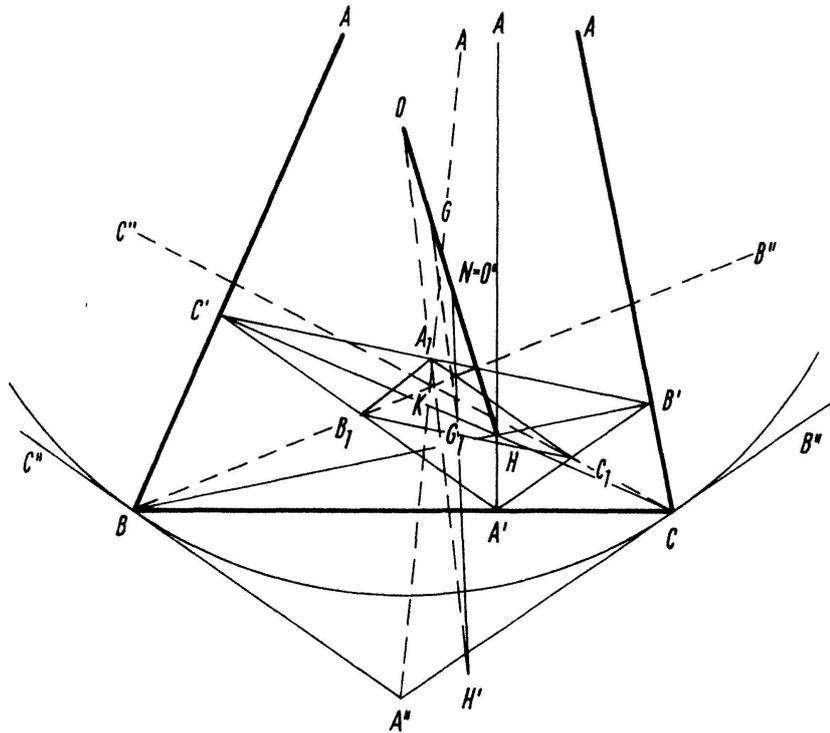
$$HG_1:G_1I_1 = 2:1 . \tag{2}$$

From (1) and (2) we see that  $GG_1$  is parallel to  $OI_1$ :

$$GG_1 \parallel OI_1 . \tag{3}$$

**Lemma 4** [2]. *Let  $N$  be the center of nine-point circle of the triangle  $ABC$ . Then  $N, G, H$  are collinear, and there holds*

$$NG:GO = 1:2 . \tag{4}$$



As is well known,  $N$  and  $G_1$  coincide with the circumcenter  $O'$  and the centroid  $G'$  of triangle  $A'B'C'$ . Thus, by lemma 2,  $N$ ,  $G_1$  and  $H'$  are collinear, and

$$NG_1 : G_1H' = 1 : 2. \tag{5}$$

**Lemma 5** [3]. *The lines  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  are concurrent at one point.*

This point is called the *symmedian point* of the triangle  $ABC$ . We denote it by  $K$ .

**Lemma 6** [4]. *Let  $A''B''C''$  be the tangential triangle of  $ABC$ , where of course  $B''C''$ ,  $C''A''$ ,  $A''B''$  are tangent at  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , respectively, to the circumcircle of  $ABC$ .*

*Then  $AA''$ ,  $BB''$ ,  $CC''$  are concurrent at the point  $K$ .*

In other words,  $K$  is the *Gergonne point* of the triangle  $A''B''C''$ .

**Lemma 7.** *Two triangles  $A_1B_1C_1$  and  $A''B''C''$  are in homothetic position, with  $K$  as the homothetic center.*

*Proof.* It is evident that  $A_1B_1 \parallel A''B''$ ,  $B_1C_1 \parallel B''C''$ ,  $C_1A_1 \parallel C''A''$ , and thus two triangles  $A_1B_1C_1$ ,  $A''B''C''$  are similar.

On the other hand, four points  $A$ ,  $A_1$ ,  $A''$ ,  $K$  are collinear from lemmas 5 and 6. Similarly,  $B$ ,  $B_1$ ,  $B''$ ,  $K$ ;  $C$ ,  $C_1$ ,  $C''$ ,  $K$  are collinear. Hence we know that  $K$  is the homothetic center of  $A_1B_1C_1$  and  $A''B''C''$ .

3. *Proof of the theorem.* According to (4) and (5),  $GG_1$  is parallel to  $OH'$ :

$$GG_1 \parallel OH'. \tag{6}$$

From (3) and (6), three points  $O$ ,  $I_1$ ,  $H'$  are collinear, and by lemma 7,  $O$  (the incenter of  $A''B''C''$ ),  $I_1$  (the incenter of  $A_1B_1C_1$ ) and  $K$  (the homothetic center) are collinear.

Thus we know that  $O$ ,  $H'$  and  $K$  are collinear, and our theorem is proved.

JIROKICHI NAGATOMO, Chiba University, Japan

REFERENCES

Pages and Nos. are referred to NATHAN ALTSHILLER-COURT: *College Geometry*, 1957.

[1] p. 101, No. 201, Theorem.

[2] p. 104, No. 209, Theorem (b).

[3] p. 249, No. 564, Theorem (a), p. 252, No. 572, Theorem.

[4] p. 254, No. 580, Remark.