Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 2

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Kleine Mitteilungen

Sur l'équation diophantienne $x^n - d^2 y^n = 2d$

Dans cette note, nous prouvons le théorème suivant:

Théorème: L'équation:

$$x^n - d^2y^n = 2d; \quad x, y, d, n \text{ dans } Z; \quad xy \neq 0; \quad n > 1 \tag{1}$$

ne possède, outre les solutions triviales:

$$x = -y = d = \pm 1, \quad n \text{ impair}, \tag{2}$$

que les quatre solutions:

$$x = 2\varepsilon, \quad y = \varepsilon, \quad d = 2\varepsilon \text{ ou } -4\varepsilon, \quad n = 3 \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{3}$$

En particulier, en prenant $d = 2\varepsilon$ et en échangeant x et y, on déduit immédiatement de ce théorème le résultat suivant, déjà établi dans [1]:

Corollaire: L'équation:

$$x^n - \frac{1}{4} y^n = \pm 1; \quad x, y, n \text{ dans } Z; \quad xy \neq 0; \quad n > 1$$

ne possède que les deux solutions:

$$(x, y, n) = (-1, -2, 3) \text{ correspondant au signe supérieur,}$$

$$(x, y, n) = (1, 2, 3) \text{ correspondant au signe inférieur.}$$

Démonstration du théorème:
Comme $y \neq 0$, (1) équivaut à $x^n y^n - d^2y^{2n} = 2dy^n$ soit à

$$(dy^n + 1)^2 = (xy)^n + 1.$$

Or Chao Ko [1] a montré que l'équation:

$$X^2 = Y^n + 1; \quad X, Y, n \text{ dans } Z; \quad XY \neq 0; \quad n > 1$$

ne possède que les deux solutions $(X, Y, n) = (\pm 3, 2, 3)$. Ici $Y = xy \neq 0$. Donc, si $X = dy^n + 1 \neq 0$, on aura

$$dy^n + 1 = \pm 3; \quad xy = 2; \quad n = 3$$

d'où on tire aisément les solutions (3).

Le cas, écarté ci-dessus, où $dy^n + 1 = 0$ donne $(xy)^n = -1$ donc $xy = -1$ et n impair et conduit aux solutions (2).

M. E. Blanpain, Lille

RÉFÉRENCE

[1] Chao Ko, *On the Diophantine Equation $x^2 = y^n + 1$, $xy \neq 0$*, Sci. Sinica *14*, 457–460 (1965).

Zur Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen

Der Beweis für die Existenz der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen ist meist mit einiger Mühe verbunden, während die Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung schnell durch Grenzübergänge zu erledigen ist[1]). Wir geben daher im folgenden einen Beweis an, nach dem die Existenz der Partialbruchzerlegung aus ihrer Eindeutigkeit folgt.

Es sei die rationale Funktion $R(x) = A(x)/C(x)$ vorgelegt, wo $A(x)$ und $C(x)$ Polynome vom Grad m bzw. n mit $m < n$ sind und

$$C = P_1^{i_1} \cdots P_r^{i_r} \cdot Q_1^{j_1} \cdots Q_s^{j_s}$$

die Primfaktorzerlegung des Nenner in Linearfaktoren P_k und quadratische (irreduzible) Faktoren Q_l darstellt. Es ist also

$$\sum i_k + \sum 2 j_l = n \, .$$

Wir setzen mit Konstanten a_{ki}, b_{lj} und c_{lj} die Partialbruchzerlegung von $R(x)$ in der Form

$$R(x) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{i_k} \frac{a_{ki}}{P_k^i} + \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=1}^{j_l} \frac{b_{lj}\, x + c_{lj}}{Q_l^j}$$

an. Indem wir die rechte Seite auf den Hauptnenner $C(x)$ bringen, erhalten wir als Zähler ein Polynom $(n-1)$-ten Grades in x[2]). Koeffizientenvergleich ergibt somit n lineare Gleichungen für die $\sum i_k + 2 \sum j_l = n$ Koeffizienten a_{ki}, b_{lj} und c_{lj}. Wäre dieses (inhomogene) Gleichungssystem im Falle einer gewissen rationalen Funktion $R(x)$ nicht lösbar, so müsste die Koeffizientendeterminante verschwinden, und daher hätte das mit denselben Koeffizienten gebildete homogene Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung. Das homogene Gleichungssystem entspricht aber dem Fall, dass wir die Partialbruchzerlegung bei identisch verschwindendem Zählerpolynom $A(x)$ suchen. Es hätte also die Funktion 0 eine nichttriviale Partialbruchzerlegung, was im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung steht.

Anmerkung: Diese Überlegung ist offensichtlich nicht auf den Körper der komplexen oder reellen Zahlen beschränkt.

G. Eisenreich, Leipzig

---

[1]) Das gilt durchaus auch im Falle des Körpers der reellen Zahlen. Von einer komplexen Nullstelle des Nennerpolynoms der gegebenen rationalen Funktion können wir nämlich, indem wir nötigenfalls durch eine Translation zu einer neuen Variablen übergehen, stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass sie rein imaginär ist, der zugehörige Faktor des Nennerpolynoms also $x^2 + a^2$ mit $a > 0$ lautet. Durch Erweitern einer rationalen Funktion mit $C(-x)$ ($C(x)$ zugehöriges Nennerpolynom) können wir erreichen, dass der Nenner eine Funktion von x^2 wird. Daher lässt sich die fragliche Partialbruchzerlegung auch in der Form

$$\frac{A(x^2) + x\, B(x^2)}{N(x^2)} = \sum_j \frac{A_j(x^2) + x\, B_j(x^2)}{N_j(x^2)}$$

schreiben, und durch Anwendung der Substitution $x \to -x$ folgt sofort, dass diese Gleichung in zwei Gleichungen für die A/N bzw. B/N allein aufspaltet. Auf diese Gleichungen lässt sich aber das traditionelle Beweisverfahren anwenden, das auf dem Grenzübergang $y = x^2 \to -a^2$ beruht (die zunächst für positive y-Werte geltende Gleichheit zwischen den entsprechenden Polynomen muss ja auch für negative y bestehen bleiben).

[2]) Indem wir von der für den Zähler entstehenden Gleichheit zu Kongruenzen mod P_k $(k = 1, \ldots, r)$ bzw. mod Q_l $(l = 1, \ldots, s)$ übergehen, erhalten wir übrigens ein System von Kongruenzen, aus dem gleichfalls sofort die Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung folgt.