

# Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Viviani-Kurve

Autor(en): **Krames, Josef**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-27347>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik*

*und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 25

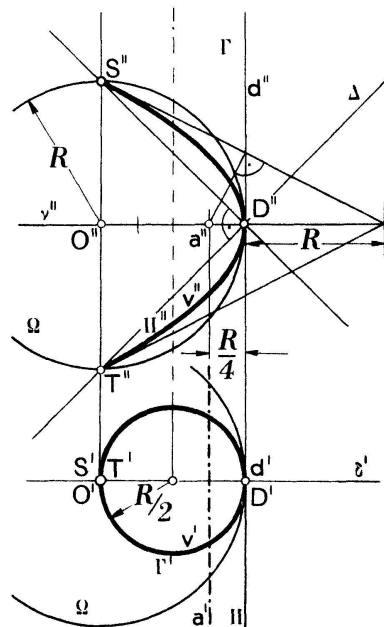
Heft 1

Seiten 1–24

10. Januar 1970

## Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Viviani-Kurve

**Nr. 1.** Eine *Viviani-Kurve*  $v$ , oft «Vivianisches Fenster» (siehe etwa [2]) genannt, ist eine metrisch spezielle rationale Raumkurve vierter Ordnung erster Art. Sie wird aus ihrem Doppelpunkt  $D$  durch einen Drehkegel  $\Delta$  vom Öffnungswinkel  $\pi/2$  projiziert und ergibt sich u. a. als Schnitt von  $\Delta$  mit einer Kugel  $\Omega$ , welche die Achse  $d$  von  $\Delta$  im Kegelscheitel  $D$  berührt.  $v$  ist orthogonal-symmetrisch bezüglich der zu  $d$  normalen Durchmessersebene  $\nu$  von  $\Omega$  sowie bezüglich der Verbindungsebene  $\delta$  von  $d$  mit der Kugelmittle  $O$ . Diese Kurve  $v$  liegt auch auf dem im Bezug auf  $\delta$  symmetrischen Drehzylinder  $\Gamma$  durch  $d$  und  $O$ , ferner auf einem parabolischen Zylinder  $\Pi$ , dessen Erzeugenden zu  $\delta$  normal sind.  $v$  ist bereits eindeutig festgelegt, wenn der Doppelpunkt  $D$  und die beiden reellen Kurvenscheitel  $S$  und  $T$  gegeben sind, welche die Endpunkte des zu  $d$  parallelen Durchmessers der Kugel  $\Omega$  bilden. In Figur 1 sind die



Figur 1

genannten Elemente in den Normalrissen auf die Ebenen  $\nu$  und  $\delta$  dargestellt. Man entnimmt daraus, dass der Parameter der Aufrissparabel  $\Pi''$  des Zylinders  $\Pi$  gleich ist dem Halbmesser des Drehzylinders  $\Gamma$ , d. i. die Hälfte des Halbmessers  $R$  der Kugel  $\Omega$ . Ferner trifft die Fokalachse  $a$  von  $\Pi$  die Symmetrieachse  $OD = \nu \delta$  von  $v$

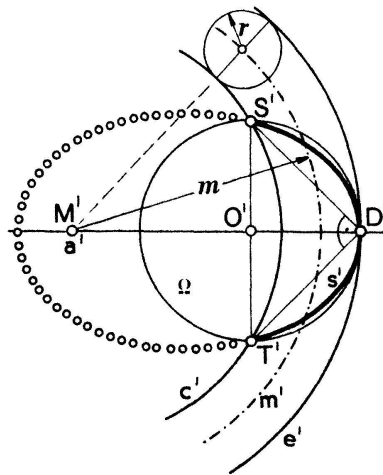
im Abstand  $R/4$  von  $D$ . Aus der gegenseitigen Lage der Fernelemente von  $\Omega$  und  $\Gamma$  folgt schliesslich, dass  $v$  den absoluten Kegelschnitt  $i$  in seinen Schnittpunkten mit der Ebene  $\nu$  berührt.

**Nr. 2.** Eine Kreisringfläche (Torus oder Wulstfläche)  $\Phi$  ist eine algebraische Fläche vierter Ordnung vierter Klasse. Wir nennen eine solche Fläche regulär, wenn sie eine im Endlichen verlaufende reelle Achse  $a$  und einen nicht ausgearteten Meridiankreis  $k$  mit reellem, nicht auf  $a$  liegendem Mittelpunkt und mit reellem Halbmesser  $r$  besitzt.  $\Phi$  enthält den absoluten Kegelschnitt  $i$  als Doppelkurve und wird längs  $i$  von den beiden isotropen Kegeln  $\Lambda_1, \Lambda_2$  berührt, die neben  $i$  den Kreis der Meridianmittelpunkte, den «Mittlenkreis»  $m$  von  $\Phi$ , gemeinsam haben. Die Mitte  $M$  von  $m$  ist zugleich Symmetriezentrum von  $\Phi$ , und die auf  $a$  liegenden konjugiert komplexen Scheitel  $L_1, L_2$  der Kegel  $\Lambda_1, \Lambda_2$  haben von  $M$  den Abstand  $\pm im$ , wenn  $m$  ( $\neq 0$ ) der Halbmesser des Kreises  $m$  ist.

In den Schnittpunkten der Meridiane mit der Drehachse  $a$  besitzt  $\Phi$  zwei konische Knotenpunkte  $K_1, K_2$ , die konjugiert komplex, in einen Kuspidalpunkt («Dorn») zusammengerückt oder reell getrennt sind, je nachdem der die Fläche (bis auf ähnliche Umformungen) eindeutig bestimmende Quotient

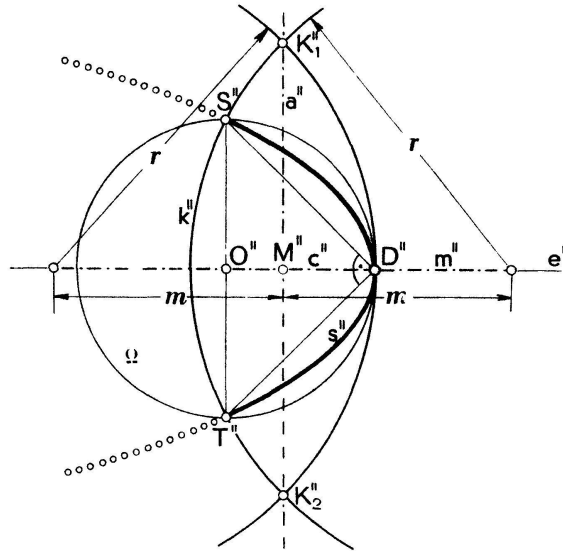
$$q = m : r \cong 1$$

ist. Die in der Ebene  $\mu$  des Mittlenkreises  $m$  enthaltenen Parallelkreise von  $\Phi$  sind der Äquator  $e$  und ein Kreis  $c$ , der für  $q > 1$  den Kehlkreis von  $\Phi$  (vgl. Figur 2), hingegen für  $q < 1$  den Äquator des zwischen den Knotenpunkten  $K_1, K_2$  liegenden spindelförmigen Flächenteiles bildet (Figur 3).



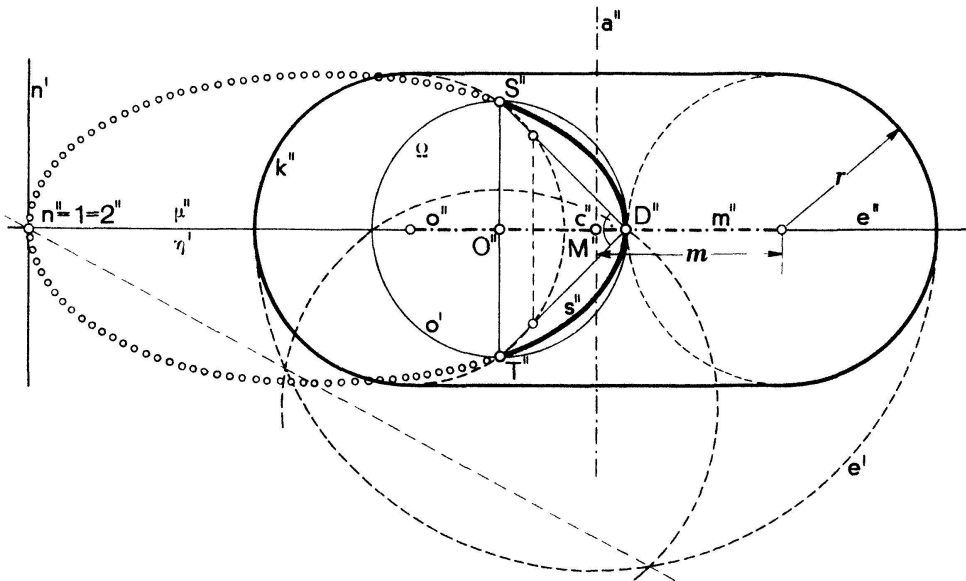
Figur 2

**Nr. 3.** Wir fragen nun, ob durch eine Viviani-Kurve  $v$  eine reguläre Kreisringfläche  $\Phi$  (Nr. 2) gelegt werden kann. Falls es eine solche Fläche gibt, dann enthält  $\Phi$  zufolge der Rotationssymmetrie  $\infty^1$  untereinander kongruente Kurven  $v$ . Weiters schneidet jede Kugel  $\Omega$  aus  $\Phi$  neben dem absoluten Kegelschnitt  $i$  im allg. nur noch eine Raumkurve vierter Ordnung  $s$  aus. Diese ist symmetrisch im Bezug auf die durch die Mitte  $O$  von  $\Omega$  gehende Meridianebene  $\eta = Oa$  von  $\Phi$  und besitzt genau einen Doppelpunkt  $D$ , wenn  $\Omega$  die Fläche  $\Phi$  in  $D$  berührt. Gehört dieser Punkt insbesondere einem der Kreise  $e$  oder  $c$  (Nr. 2) an, dann liegt die Kugelmitte  $O$  in der Mittlenkreis-



Figur 3

ebene  $\mu$ . Die Kurve  $s$  ist nun auch symmetrisch bezüglich  $\mu$  und ihre Normalrisse auf  $\eta$  und  $\mu$  sind doppelt überdeckte Kegelschnitte. Derartige Kurven  $s$  treten je nach der Wahl des Quotienten  $q$  von  $\Phi$  und der Annahme des Punktes  $D$  auf  $e$  oder  $c$  in verschiedenartigen Gestalten auf. In den Abbildungen 2, 3, 4 und 5 sind Beispiele dafür dargestellt, wobei auch die parasitischen Zweige der Normalrisse dieser Kurven



Figur 4

hervorgehoben wurden. In Figur 4, 5 ist überdies die Konstruktion des  $D''$  bzw.  $D'$  gegenüberliegenden Scheitels der Kurve  $s''$  bzw.  $s'$  (als reeller Bildpunkt gewisser konjugiert komplexer Schnittpunkte  $1, 2$  von  $\Phi$  und  $\Omega$ ) angedeutet.

**Nr. 4.** Damit eine dieser Kurven  $s$  im besondern eine Viviani-Kurve sei, müssen noch folgende beiden Bedingungen erfüllt sein:

**I)** Die in der Mittenkreisebene  $\mu$  oder in der durch die Mitte der Kugel  $\Omega$  gehenden Meridianebene  $\eta$  befindlichen reellen Scheitel  $S$  und  $T$  der Kurve  $s$  begrenzen die Hypotenuse



eines gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreiecks mit dem Scheitel im Doppelpunkt  $D$  von  $s$  (Figuren 2, 3, 4);

II) die beiden im Doppelpunkt  $D$  von  $s$  vorhandenen Kurventangenten stehen aufeinander normal.

Die zweite dieser Bedingungen kann auch ersetzt werden durch:

III) Der Normalriss der Kurve  $s$  auf ihre Symmetrieebene  $\delta = DST$  ist eine doppelt zu zählende Parabel mit dem Scheitel in  $D$  und mit der Achse in der Symmetralen von  $ST$ .

Die Kurve  $s$  ist sodann in der Tat die Schnittkurve des in Nr. 1 genannten Drehkegels  $\Delta$  mit der Kugel  $\Omega$ , die  $S$  und  $T$  zu Gegenpunkten hat, oder der Schnitt von  $\Omega$  mit dem parabolischen Zylinder  $\Pi$  durch  $s$  (vgl. Figur 1).

Auf Grund obiger Bedingungen sind die Lage der Kugelmitte  $O$  (innerhalb der Mittenkreisebene  $\mu$ ) und die Wahl des Halbmessers  $R$  der Kugel  $\Omega$  wesentlich eingeschränkt. Beispielsweise können alle jene Annahmen von  $O$  und  $R$  von vorneherein ausgeschlossen werden, bei denen  $\Omega$  einen der in  $\mu$  befindlichen Parallelkreise  $e$  und  $c$  (s. Nr. 2) oder einen Meridiankreis  $k$  von  $\Phi$  zum Hauptkreis hätte. Denn  $\Omega$  würde in einem solchen Fall die Kreisringfläche  $\Phi$  längs des betreffenden Kreises  $e$ ,  $c$  oder  $k$  berühren und daher mit  $\Phi$  keinen weiteren Punkt gemeinsam haben.

**Nr. 5.** Um herauszufinden, ob unter den nicht ausgearteten Raumkurven  $s$  auch Viviani-Kurven vorkommen, läge es nahe, für die Kreisringfläche  $\Phi$  und für die Kugel  $\Omega$  die zum Berührungspunkt  $D$  gehörenden *Indikatrizen* auf bekannte Weise (siehe u. a. [1]) festzulegen und zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen ihre vier Schnittpunkte auf zueinander normalen Durchmesser dieser Kurven liegen. Der einfachste Weg zur Klarstellung der aufgeworfenen Frage beruht indessen auf folgenden Überlegungen:

Die vier Fernpunkte  $F_i$  jeder Schnittkurve  $s$  einer Kreisringfläche  $\Phi$  mit einer Kugel  $\Omega$  gehören dem absoluten Kegelschnitt  $i$  an, und zwar sind dies jene Punkte von  $i$ , in welchen  $\Phi$  und  $\Omega$  einander berühren. Da  $\Omega$  entlang  $i$  vom isotropen Kegel mit der Kugelmitte  $O$  als Scheitel berührt wird, erhält man die vier Fernpunkte  $F_i$  von  $s$ , wenn man aus  $O$  an die beiden ( $\Phi$  längs  $i$  berührenden) isotropen Kegel  $A_1$  und  $A_2$  (Nr. 2) die Tangentialebenen  $\lambda_i$  legt und deren Berührungspunkte  $F_i$  auf  $i$  aufsucht. Damit diese vier Punkte paarweise zusammenfallen, wie dies für die Viviani-Kurve zutrifft (Nr. 1), ist notwendig und hinreichend, dass die Kugelmitte  $O$  auf dem im Endlichen vorhandenen Schnitt von  $A_1$  und  $A_2$ , also auf dem Mittenkreis  $m$  von  $\Phi$  liegt. Die vier Ebenen  $\lambda_i$  sind sodann zu je zwei in die  $m$  in  $O$  berührenden isotropen Ebenen  $\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{24}$  übergegangen, und deren Berührungspunkte  $F_{13}$ ,  $F_{24}$  auf  $i$  bilden die absoluten Punkte der Meridianebene  $\eta = Oa$  von  $\Phi$ . Eine solche Kurve  $s$  bildet sich demnach im Normalriss (Grundriss) auf die Mittenkreisebene  $\mu$  stets als eine Parabel  $s'$  mit der Achse  $\eta' = a'O'$  ab. Nach Nr. 1 folgt hieraus zunächst der

*Hilfssatz:* Falls auf einer Kreisringfläche  $\Phi$  eine Viviani-Kurve existiert, dann liegen deren reelle Scheitel  $S$ ,  $T$  in der Mittenkreisebene von  $\Phi$ .

Im allgemeinen besitzt jedoch die Schnittkurve  $s$  von  $\Phi$  mit einer Kugel  $\Omega$ , deren Mitte  $O$  dem Kreis  $m$  angehört, keinen Doppelpunkt und genügt daher auch nicht den Bedingungen I und II in Nr. 4.

**Nr. 6.** Wir setzen nun zuerst voraus, dass die Kreisringfläche  $\Phi$  einen Quotienten  $q = m : r > 1$  aufweist und wählen das gleichschenkligh-rechtwinklige Dreieck  $DST$

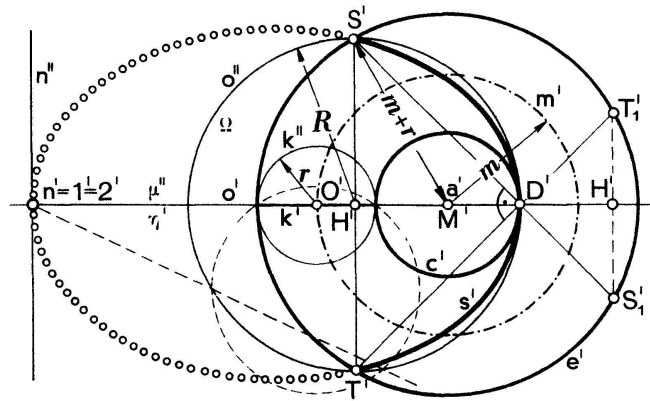
mit  $D$  auf dem Kehlkreis  $c$  von  $\Phi$  und die Kurvenscheitel  $S, T$  nach Nr. 4, Bedingung I, auf dem Äquator  $e$  (Figur 5). Die Kugel  $\Omega$  mit dem Durchmesser  $ST$  schneidet dann  $\Phi$  in einer Kurve  $s$ , deren Grundriss  $s'$  nach obigen Ausführungen nur dann eine Parabel (Nr. 4, III) ist, wenn die Mitte von  $\Omega$ , nämlich der Halbierungspunkt  $H$  der Strecke  $ST$ , auf den Mittenkreis  $m$  von  $\Phi$  zu liegen kommt. Wie der Figur 5 zu entnehmen ist, rückt  $H$  genau dann in die Mitte  $O$  des in  $\eta = D a$  enthaltenen und nicht durch  $D$  gehenden Meridiankreises  $k$  (vgl. hierzu Schluss von Nr. 4), sobald

$$m^2 + (2m - r)^2 = (m + r)^2$$

oder

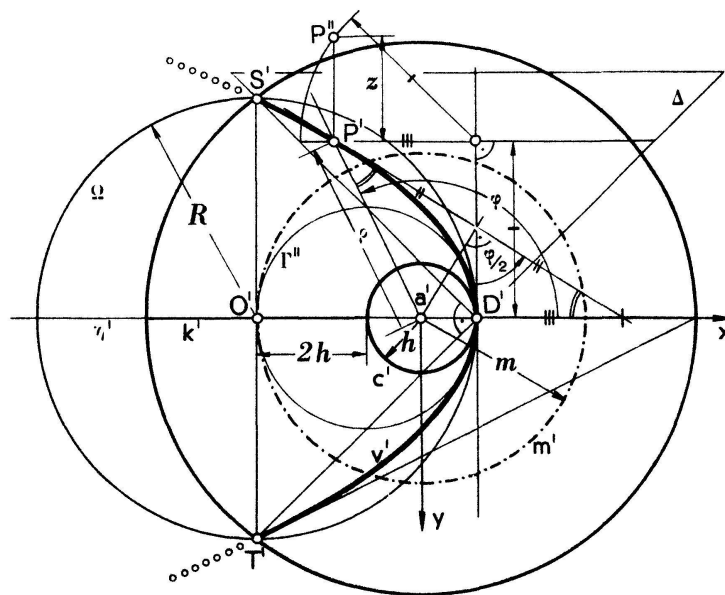
$$2m = 3r$$

ist, wobei der triviale Grenzfall  $m = 0$  ( $\Phi = \Omega$ ) ausser Betracht bleiben kann.



Figur 5

Um mittels einfacher Rechnungen rasch zu bestätigen, dass die spezielle Kreisringfläche  $\Psi$  mit dem Quotienten  $q = 3 : 2$  (siehe Figur 6) tatsächlich  $\infty^1$  Viviani-Kurven enthält, wählen wir die Symmetrieachse einer Kurve  $v$  als  $x$ -Achse, die Fokalachse  $a$  des durch  $v$  legbaren parabolischen Zylinders  $\Pi$  (Figur 1) als  $z$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems und bezeichnen (siehe Figur 6) den Normal-



Figur 6

riss eines Punktes  $\mathbf{P}$  von  $\mathbf{v}$  auf die Symmetrieebene  $\mathbf{DST}$  mit  $\mathbf{P}'$ , den Radiusvektor  $\mathbf{a}'\mathbf{P}'$  mit  $\varrho$ , endlich die Amplitude von  $\mathbf{a}'\mathbf{P}'$  gegen die  $x$ -Achse mit  $\varphi$ . Wird der Parameter der Parabel  $\mathbf{v}'$  (vgl. Figur 1)  $= 2h$  gesetzt, so gilt, weil  $\mathbf{a}'$  der Brennpunkt von  $\mathbf{v}'$  ist:

$$\varrho = h : \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Weiters folgt für die  $z$ -Koordinate des Punktes  $\mathbf{P}$  aus Figur 6 (vgl. Nr. 1, Figur 1):

$$z^2 = h^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \left( 4 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right).$$

Das Eliminieren von  $\varphi$  aus diesen beiden Gleichungen ergibt in den Zylinderkoordinaten  $\varrho, \varphi, z$ :

$$(\varrho - 3h)^2 + z^2 = 4h^2,$$

d.i. die Gleichung der Kreisringfläche  $\Psi$ , deren Kehlkreis  $\mathbf{c}$ , Meridiankreis  $\mathbf{k}$  und Mittenkreis  $\mathbf{m}$  der Reihe nach die Halbmesser haben (s. Figur 6):

$$h, \quad 2h, \quad 3h;$$

dabei ist der Halbmesser der durch  $\mathbf{v}$  legbaren Kugel:  $R = 4h$ . Damit ist bewiesen:

*Unterwirft man eine Viviani-Kurve  $\mathbf{v}$  der Drehung um die Fokalachse  $\mathbf{a}$  ihres parabolischen Trägerzylinders  $\Pi$  (Figur 1 und 6), dann beschreibt sie eine Kreisringfläche  $\Psi$  vom Quotienten 3 : 2.*

**Nr. 7.** Um nachzuweisen, dass ausser  $\Psi$  keine andere reguläre (s. Nr. 2) Kreisringfläche existiert, auf der Viviani-Kurven liegen, bedarf es noch folgender Überlegungen: Vor allem erkennt man, dass bei der zweiten, in Figur 5 mit  $\mathbf{S}_1\mathbf{T}_1$  bezeichneten Lage des Scheitelpaares  $\mathbf{ST}$  auf  $\mathbf{e}$  keine Viviani-Kurve auftreten kann, wie immer auch die Kreisringfläche  $\Phi$  mit  $q > 1$  gewählt werden mag. Denn die Mitte der Kugel  $\Omega$  soll ja mit dem Halbierungspunkt  $\mathbf{H}$  von  $\mathbf{S}_1\mathbf{T}_1$ , aber nach Nr. 5 auch mit dem Mittelpunkt  $\mathbf{O}$  jenes innerhalb  $\eta = \mathbf{D}\mathbf{a}$  vorhandenen Meridiankreises  $\mathbf{k}$  übereinstimmen, der  $\mathbf{D}$  nicht enthält (vgl. wieder Nr. 4). Weil aber  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{O}$  hier immer zu verschiedenen Seiten der Flächenmitte  $\mathbf{M}$  liegen, können diese Punkte nur für den bereits erwähnten Grenzfall  $q = 0$  ( $\Phi = \Omega$ ) zur Deckung kommen.

Wie man sich anhand einfacher Skizzen überzeugt, gelten die gleichen Feststellungen auch für jede Kreisringfläche  $\Phi$  mit  $q < 1$ , wenn der Berührungspunkt  $\mathbf{D}$  von  $\Phi$  mit der Kugel  $\Omega$  am äusseren Äquator  $\mathbf{e}$  von  $\Phi$  angenommen ist, und sofern darnach die Scheitel  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{T}$  der Kurve  $\mathbf{s} = \Phi\Omega$  gemäss Bedingung I in Nr. 4 am inneren Äquator  $\mathbf{c}$  als reelle Punkte möglich sind; letzteres trifft für  $0 < q \leq 3 - 2\sqrt{2}$  zu.

Gehört hingegen  $\mathbf{D}$  bei einer Fläche  $\Phi$  mit  $q < 1$  dem Kreis  $\mathbf{c}$  an, dann liegen entweder die Punkte  $\mathbf{O}$  und  $\mathbf{H}$  ebenfalls auf verschiedenen Seiten der Drehachse  $\mathbf{a}$ , oder die Kurve  $\mathbf{s}$  hat in  $\mathbf{D}$  einen isolierten Doppelpunkt, ist also auf keinen Fall eine Viviani-Kurve. Dies gilt schliesslich auch für alle Fälle, bei denen die Kurve  $\mathbf{s}$  ausser dem am Kreis  $\mathbf{e}$  gelegenen Doppelpunkt keinen weiteren reellen Punkt aufweist, beispielsweise für den Sonderfall einer Kreisringfläche mit Dorn ( $q = 1$ , s. Nr. 2).

Damit sind nach dem Hilfssatz in Nr. 5 alle Möglichkeiten erschöpft, und das Endergebnis lautet:

*Durch jede Viviani-Kurve lässt sich eine einzige reguläre Kreisringfläche  $\Psi$  legen; ihr Mittenkreis hat einen Halbmesser, der gleich dem eineinhalbfachen Meridianhalbmesser ist.*

Auf die durch eine Viviani-Kurve  $v$  legbaren *Dupinschen Zykliden* soll an anderer Stelle eingegangen werden. Je zwei dieser Flächen, zu denen auch unsere spezielle Kreisringfläche  $\Psi$  gehört, sind im Bezug auf die Trägerkugel von  $v$  invers.

JOSEF KRAMES, TH Wien

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie*, Wien 1957, §§ 28 und 85.  
 [2] W. WUNDERLICH, *Darstellende Geometrie I*, B-I-Hochschultaschenbücher 96, 96a, Mannheim, S. 173.

## Über Krümmungen höherer Ordnung in den Scheitelpunkten einiger ebener Kurven und deren konstruktive Auswertung

Die Darstellung ebener Kurven durch Stützfunktionen und ihre ersten Ableitungen erweist sich für differentialgeometrische Untersuchungen z. B. an Eilinen, bei denen die erforderlichen Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt sind, als vorteilhaft. Im folgenden soll diese Darstellungsweise auf Kegelschnitte angewandt werden, wobei ein Brennpunkt als Pol der Stützfunktion fungieren soll. So gestaltet sich die Einführung der Stützfunktion besonders einfach, weil die auf einen Brennpunkt eines Mittelpunktskegelschnittes bezogene Fusspunktkurve mit dem Hauptscheitelkreis des Kegelschnittes identisch ist. Bei der Parabel fällt die auf den Brennpunkt bezogene Fusspunktkurve mit der Scheiteltangente zusammen.

Für die folgenden Rechnungen werde der Brennpunkt des darzustellenden Kegelschnittes in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt. Ferner sei der Hauptscheitelkreis durch die Gleichung

$$(x - t)^2 + y^2 = (s - t)^2$$

gegeben.

Von den Parametern  $s$  und  $t$ , deren geometrische Bedeutung aus Bild 1 ersichtlich ist, werde vorausgesetzt:  $s < 0$ ,  $s \neq t$ ,  $2t$ . Wendet man auf das Dreieck  $FMQ$  den Cosinus-Satz der ebenen Trigonometrie an, erhält man nach elementarer Umformung für die Stützfunktion die Darstellung

$$p(\omega) = t \cos \omega - W \quad \text{mit} \quad W = \sqrt{s^2 - 2st + t^2 \cos^2 \omega}. \quad (1)$$