# 3. Helices in $S^3$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

## 3. Helices in $S^3$

A spherical helix in $S^3$ is a curve $p(t)$ of constant geodesic curvature and torsion. As in $R^3$, two spherical helices of the same curvature and torsion are congruent.

If the curvature is nonzero, then we can define a Frenet frame $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ along $p(t)$ in the usual way, and get the Frenet equations:

$$T' = \kappa N\,, \quad N' = -\kappa T - \tau B\,, \quad B' = \tau N\,.$$

Here we assume that $t$ is an arc length parameter along $p(t)$, and use primes $'$ to denote covariant differentiation of vector fields along this path.

A model helix in $S^3$ is given by

$$p(t) = (\cos\alpha\cos at,\ \cos\alpha\sin at,\ \sin\alpha\cos bt,\ \sin\alpha\sin bt)\,.$$

Here $\alpha$ ranges between 0 and $\pi/2$ and determines the shape of the flat torus

$$x_1^2 + x_2^2 = \cos^2\alpha\,, \quad x_3^2 + x_4^2 = \sin^2\alpha\,,$$

on which the helix $p(t)$ lies. We take the numbers $a$ and $b$ to be $\geqslant 0$, and require that

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = 1\,,$$

so that the helix will be traversed at unit speed. Every spherical helix in $S^3$ is congruent to one of these models.

Next, we give formulas for the curvature $\kappa$, torsion $\tau$, and writhe $\rho = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ of the model helix $p(t)$ in terms of the descriptive parameters $\alpha$, $a$ and $b$. These formulas are given as general information only, and will not be used here.

We first record two simple inequalities which follow from the equality $a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = 1$.

Note that $a = 1$ and $b = 1$ satisfies this equation. So if one of these quantities increases above 1, the other must decrease below 1. Arranging matters so that $a$ is the larger of the two, we will then have

$$(a^2-1)(1-b^2) \geqslant 0\,.$$

In addition,

$$a^2 + b^2 \geqslant a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = 1\,,$$

so we have

$$a^2 + b^2 - 1 \geqslant 0\,.$$

The formulas for curvature, torsion and writhe are as follows.

$$\begin{aligned} \text{Curvature} &= \kappa = \sqrt{(a^2-1)(1-b^2)} \\ \text{Torsion} &= \tau = ab \\ \text{Writhe} &= \rho = \sqrt{a^2+b^2-1}\,. \end{aligned}$$

Consider the 3-dimensional linear space of vector fields

$$aT(t) + bN(t) + cB(t)$$

which can be written as constant coefficient combinations of the Frenet vectors along the helix $p(t)$. Covariant differentiation along the helix maps this linear space to itself according to the Frenet formulas.

We've already noted in the introduction that the instantaneous axis vector $U = \tau T - \kappa B$ satisfies $U' = 0$.

Consider the vectors $N$ and $V = (\kappa/\rho)T + (\tau/\rho)B$, which form an orthonormal basis for the orthogonal complement of $U$. Note that

$$\begin{aligned} N' &= -\kappa T - \tau B = -\rho V, \quad \text{and} \\ V' &= (\kappa/\rho)T' + (\tau/\rho)B' = (\kappa/\rho)(\kappa N) + (\tau/\rho)(\tau N) = \rho N\,. \end{aligned}$$

Thus, covariant differentiation along the helix kills the instantaneous axis vector and takes the orthogonal 2-plane to itself by a 90° rotation, followed by multiplication by the writhe.

## 4. Sasaki's equations

Let $M$ be any Riemannian manifold, and $UM$ its unit tangent bundle with the Riemannian metric described in section 1.

Theorem (Sasaki [Sa], 1958). *The curve $(p(t), v(t))$ in $UM$ is a constant speed geodesic there if and only if both of the following equations hold:*

1) $v'' = -\langle v', v' \rangle v$

2) $p'' = R(v', v)p'$.

Here, primes denote ordinary derivatives with respect to $t$ when applied to functions, and covariant derivatives along the path $p(t)$ when applied to vector fields. For example, the first prime in $p''$ represents ordinary differentiation, the second, covariant differentiation. The symbol $R$ denotes the Riemann curvature transformation

$$R: TM_p \times TM_p \to \mathrm{Hom}(TM_p, TM_p)\,.$$