Exercices

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

EXERCICES

1. (Descartes 1639). Montrer que, pour la deuxième courbe de Debeaune, le segment de la droite $y = x + a$ coupé par l'horizontale et la tangente de chaque point B est toujours de longueur $a\sqrt{2}$ (voir fig. 2).

2. Calculer par la méthode de Newton la solution de l'équation différentielle (1) pour la condition initiale $y(0) = 1$.

   Résultat:

$$y = 1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5, \ \&c.$$

3. Appliquer au premier problème de Debeaune
   a) la méthode de Newton,
   b) la séparation des variables suivie d'une quadrature,
   c) la méthode de Leibniz (formule (4)).

   On trouve alors la série de Taylor pour e^x et la formule

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

4. Expliquer la signification des lignes dessinées à la figure 10 concernant la solution de la tractrice. Calculer l'intégrale (14) en utilisant la substitution $a^2 - y^2 = v^2$.

5. La caténaire renversée est-elle la forme idéale pour un arc portant un pont?

6. Calculer l'intégrale (25) pour $m = 1$ et montrer que la solution est un cercle.

7. (Johann Bernoulli 1697). Transformer l'équation de Bernoulli (15) en une équation linéaire en posant $y = v^{\frac{1}{1-n}}$.

8. (Le pendule isochrone). La force tangentielle d'un corps soumis à la pesanteur et glissant sur une courbe est

$$mg \cdot \sin \alpha = mg \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

   où $p = y'$. On cherche une courbe pour laquelle cette force est proportionnelle à l'arc s, donc on veut que

(26) $$s = c\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

En conséquence, le mouvement du corps est une oscillation purement harmonique et la période indépendante de l'amplitude. Trouver la solution.

Indication: Dériver (26) (comme en (8)) et utiliser $ds = \frac{\sqrt{p^2+1}}{p} \cdot dy$. On tombe sur l'équation (17) («animo revolvens inexpectatam illam identitatem *Tautochronae Hugeniae* nostrae que *Brachystochronae*» (Johann Bernoulli)).

> «Dieses ist von Christian Huygens ersonnen, dem genialsten Uhrmacher aller Zeiten» (Horologium Oscillatorium, Paris 1673).
>
> (A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Band I).

9. On cherche une courbe de longueur L pour laquelle le centre de gravité est le plus bas possible, i.e.

$$\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \min!$$

$$\text{sous condition } \int_a^b \left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{L}{b-a}\right) dx = 0.$$

Montrer que la «Solutio huius Quaestionis esse curvam Catenariam» (Euler [11], Cap. V, § 73).

10. Obtenir l'équation de la brachystochrone (17) en se basant sur l'équation d'Euler (21).

11. Montrer que la solution du problème isopérimétrique (25), pour $m \to \infty$, converge vers un triangle.