§5. La trace de Jones-Ocneanu

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Et cela implique

$$f = \sum_{\varphi} \prod_{i} c_{\varphi(i)}(y) x_i^{\varphi(i)} = \prod_{i} \sum_{n>0} c_n(y) x_i^n = \prod_{i} \prod_{j} (1 + x_i y_j) .$$

§ 5. La trace de Jones-Ocneanu

On se propose ici de montrer les théorèmes 1-6 et 1-7.

5-1. Soit donc $\equiv$ une relation d'équivalence additive sur Λ possédant la propriété suivante:

(P) $\quad \forall n > 0, \forall u \in H_n, \quad t_n(u) \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n] \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}] .$

Comme σ_n^{-1} est égal à $\alpha\beta^{-1} - \beta^{-1}\sigma_n$, on a

$$t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}] = \alpha\beta^{-1} c_1 t_n(u) - \beta^{-1} t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n] .$$

D'autre part, l'application de H_n dans H_{n+1} qui à u associe $(ux1_1)\sigma_n$ induit l'application θ de E_{n-1} dans E_n (voir 3-2). La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0, \forall u \in E_{n-1} , \quad f(u) \equiv f(\theta u) \equiv \alpha\beta^{-1} c_1 f(u) - \beta^{-1} f(\theta u) ,$$

c'est-à-dire

$$\forall u \in E , \quad f(u) \equiv f(\theta u) \quad \text{et} \quad (1 + \beta - ac_1) f(u) \equiv 0 ,$$

f désignant la projection canonique de E sur Λ.

D'autre part, E est un Λ-module libre de base $(s_0, s_1, s_2, ...)$ et l'on a

$$\forall n > 0 , \quad \theta s_n = s_{n+1} \quad \text{et} \quad f(s_n) = c_{n+1} .$$

La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0 , \quad \forall u \in \Lambda , \quad uc_n \equiv uc_{n+1} \quad \text{et} \quad uc_n(1 + \beta - \alpha c_1) \equiv 0 ,$$

et la plus petite relation $\equiv$ vérifiant la propriété (P) est donc la congruence modulo l'idéal J de Λ engendré par les éléments

$$c_n - c_1 , \quad n > 1 \quad \text{et} \quad c_1(1 + \beta - \alpha c_1) ,$$

ce qui achève de démontrer le théorème 1-6.

5-2. Soit τ une tresse de B_n, $n > 0$. La classe de $t_n(\tau)$ modulo l'idéal I_0 de Λ engendré par les éléments $c_i - c_1$ est de la forme cP, où c représente

la classe commune des c_i et P est un polynôme de $k[c] = \mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]$. Il en résulte que la classe de $t_n(\tau)$ modulo J est représentée par cP', P' désignant la classe de P dans l'anneau $A = k[c]/_{1+\beta-\alpha c}$. D'après les théorèmes d'Alexander et Markov, le polynôme P' ne dépend que de l'entrelacs $\hat{\tau}$. On a ainsi associé à tout entrelacs orienté E un polynôme $P_E = P'$ de l'anneau A. Cet anneau est en fait le sous-anneau de $k[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}]$ engendré par α, β, β^{-1} et $(1+\beta)\alpha^{-1}$.

Si x est un croisement d'un entrelacs E dessiné dans le plan, la méthode d'Alexander permet de modifier le dessin de E sans changer le croisement x de façon à obtenir un entrelacs E' isotope à E et de la forme $\hat{\tau}$, où τ est une tresse de B_n. Il en résulte que les trois entrelacs E_+, E_- et E_0 obtenus par modification de E au voisinage de x sont isotopes à des entrelacs de la forme $\hat{\tau}_+$, $\hat{\tau}_-$ et $\hat{\tau}_0$ où l'on a

$$\tau_+ = \tau'\sigma_i\tau'', \quad \tau_- = \tau'\sigma_i^{-1}\tau'', \quad \tau_0 = \tau'\tau''.$$

On a alors dans l'algèbre H_n l'égalité suivante:

$$\tau_+ - \alpha\tau_0 + \beta\tau_- = 0,$$

ce qui implique

$$P_{E_+} - \alpha P_{E_0} + \beta P_{E_-} = 0.$$

Si E est le nœud trivial il est de la forme $\hat{1}_1$ et la classe de 1_1 dans le quotient de Λ par I_0 est égal à c. On a donc

$$P_E = 1$$

et le théorème 1-7 est alors clair.

§ 6. Une généralisation du polynôme de Jones-Conway

Soit $n > 0$ un entier. Soit L une sous-variété différentiable compacte orientée de dimension 1 de l'espace usuel $\mathbf{R}^3$ entièrement contenue dans la bande $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$. On suppose que le bord de L est standard. C'est-à-dire qu'il est formé des $2n$ points de coordonnées $(i, j, 0)$ avec $i = 0, 1$ et j variant de 1 à n. On suppose de plus qu'en chacun de ces points, le vecteur tangent à L est vertical descendant, c'est-à-dire à projection nulle sur le plan horizontal $0 \times \mathbf{R}^2$ et à projection négative sur l'axe vertical $\mathbf{R} \times 0$.