Ein Demonstrationsmodell für Cutoff-Frequenzen

Autor(en): **Häusler, Klaus / Koller, Martin Georg**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Ingenieur und Architekt**

Band (Jahr): **107 (1989)**

Heft 5

PDF erstellt am: **14.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-77041

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ein Demonstrationsmodell für Cutoff-Frequenzen

Am Institut für Mechanik der ETH Zürich ist ein diskretisiertes Modell einer sogenannten elastisch gebetteten Saite gebaut worden. Seine Aufgabe ist es, das physikalische Phänomen der Cutoff-Frequenzen zu veranschaulichen. Im vorliegenden Artikel wird dieses Phänomen erläutert und das Modell kurz vorgestellt.

VON KLAUS HÄUSLER UND MARTIN GEORG KOLLER, ZÜRICH

Auf Cutoff-Frequenzen stösst man beim Studium fortschreitender harmonischer Wellen in Wellenleitern (Stäbe, Platten usw.). Fast alle auftretenden Wellenarten («Modes») in solchen Leitern besitzen eine Cutoff-Frequenz. Eine Ausnahme bildet jedoch meist die einfachste Wellenart (z.B. einfache Torsionswelle, Biegewelle usw.). Da diese in praktischen Fällen häufig - aber nicht immer - die wichtigste ist, wird das Phänomen der Cutoff-Frequenzen oft kaum beachtet.

Cutoff-Frequenzen beim Torsionsstab

Das Wesen der Cutoff-Frequenzen soll am einfachen Beispiel harmonischer Torsionswellen in einem kreisrunden, prismatischen, linear-elastischen Stab erläutert werden.

Als Torsionswellen werden Wellen bezeichnet, die eine rein tangentiale, vom Winkel unabhängige Verteilung der Verschiebung bzw. der Partikelgeschwindigkeit aufweisen (Bild 1a). Es ist möglich, mit Hilfe der exakten Bewegungsgleichungen des dreidimensionalen linear-elastischen Kontinuums zu zeigen [1], dass verschiedene Arten (Modes) solcher Wellen auftreten können (siehe «Pochammer-Chree-Gleichungen»).

Beim ersten - und einfachsten - Mode ist die Partikelgeschwindigkeit proportional zum Radius r; der Querschnitt bewegt sich als Ganzes wie ein starrer Körper um seine Achse (Bild 1b). Unabhängig von der Frequenz ist die Wellengeschwindigkeit $c_T = \sqrt{G/\varrho}$ (G: Schubmodul, ϱ: Dichte); eine Cutoff-Frequenz existiert nicht. Ein solches Verhalten nennt man dispersionsfrei.

Es gibt unendlich viele weitere, sogenannte «höhere» Modes mit frequenzabhängiger Wellengeschwindigkeit, d.h. mit dispersivem Verhalten. Als Beispiele sind die Verteilungen der Partikelgeschwindigkeiten im Querschnitt für den 2. und 3. Mode in den Bildern 1c und 1d skizziert. Im Gegensatz zum 1. Mode werden hier auch die Querschnitte selbst deformiert. Alle diese höheren Modes weisen je eine Cutoff-Frequenz f_c auf.

Fortschreitende Wellen eines bestimmten Modes können nur existieren, falls die Frequenz f oberhalb der Cutoff-Frequenz liegt ($f > f_c$). Nur in gewissen komplizierten Sonderfällen können auch fortschreitende Wellen mit Frequenzen leicht unterhalb der Cutoff-Frequenz existieren. Notwendigerweise treten dann auch negative Gruppengeschwindigkeiten auf (siehe «Rayleigh-Lamb-Spektrum»).

Im Grenzfall $f \to f_c^+$ strebt die Wellenlänge immer gegen Unendlich; jegliche Ortsabhängigkeit längs des Wellenleiters entfällt. f_c kann daher als Eigenfrequenz des Wellenleiters für eine reine Schwingung des Querschnitts im entsprechenden Mode interpretiert werden. Für $f < f_c$ entsteht eine längs des Leiters örtlich exponentiell abklingende, überall in Phase schwingende «Grenzschicht» mit gegenüber $f \geq f_c$ unveränderter Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt. Wird ein langer Stab an einem freien Ende torsionsartig mit $f < f_c^{(2)}$ ($f_c^{(2)}$: Cutoff-Frequenz des 2. Modes) angeregt mit einer Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt, die nicht dem 1. Mode entspricht, so läuft trotzdem nur eine Welle im 1. Mode durch den Stab. Eine Linearkombination der höheren Modes sorgt dafür, dass sich die vorgegebene Verteilung im Anregungsquerschnitt einstellen kann. Diese höheren Modes klingen aber alle örtlich ab, je kleiner das jeweilige Verhältnis f/f_c, desto stärker.

In der Praxis wird normalerweise nur mit dem 1. Mode gearbeitet, was auch meist genügt. Tatsächlich liegt beispielsweise die Cutoff-Frequenz des 2. Modes für einen Stahlstab mit Radius $a = 10$ mm bei $f_c^{(2)} = 260$ kHz! Unterhalb dieser Frequenz gilt für die höheren Modes gewissermassen noch das St-Venantsche Prinzip, da sie nur zur Erfüllung der Randbedingungen, d.h. nur lokal von Bedeutung sind!

Die elastisch gebettete Saite

Die elastisch gebettete Saite dürfte, was die mathematische Behandlung anbelangt, der einfachste denkbare Wellenleiter sein, bei welchem eine Cutoff-Frequenz existiert. Eine solche Saite ist nichts anderes als eine klassische «Schulbeispiel-Saite», ergänzt mit einer Rückstellkraft pro Längeneinheit, die an jeder Stelle proportional zur momentanen (transversalen) Auslenkung y aus der Ruhelage ist (Bild 2).

Mit Hilfe des Impulssatzes, angewendet auf ein infinitesimal langes Stück der Saite, kann die Bewegungsgleichung der elastisch gebetteten Saite für kleine Auslenkungen y elementar hergeleitet werden [2]. Die partielle Differentialgleichung lautet ($,_x$: partielle Ableitung nach der Ortsvariablen, $\dot{}$: partielle Ableitung nach der Zeit):

$$(1) \quad y_{,xx} - \frac{k}{T} y = \frac{1}{c_o^2} \ddot{y} \text{ mit } c_o = \sqrt{\frac{T}{\varrho}}.$$

Hierin bedeuten T die Spannkraft der Saite, k die Federkonstante der elastischen Bettung pro Längeneinheit und ϱ die Masse pro Länge. Wie man sich leicht überzeugen kann, erfüllt die d'Alembertsche Lösung der klassischen Wellengleichung, $y = f(x \pm c_o t)$, Gleichung (1) nicht. Das System ist somit dispersiv, d.h. eine Störung beliebiger Form kann sich nicht ohne Gestaltänderung ausbreiten.

Ein harmonischer Ansatz der Form

$$(2) \quad y = y_o e^{-i(\gamma x - \omega t)}$$

(y_o: Amplitude,

$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda}$: Wellenzahl, λ: Wellenlänge,

$\omega = 2\pi f$: Kreisfrequenz) hingegen erfüllt Gleichung (1), falls gilt:

$$(3) \quad \gamma(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_o^2} - \frac{k}{T}}.$$

Der verwendete Lösungsansatz hat den Charakter einer fortschreitenden sinusoidalen Welle, solange γ reell bleibt, d.h. solange

$$\frac{\omega^2}{c_o^2} > \frac{k}{T}.$$

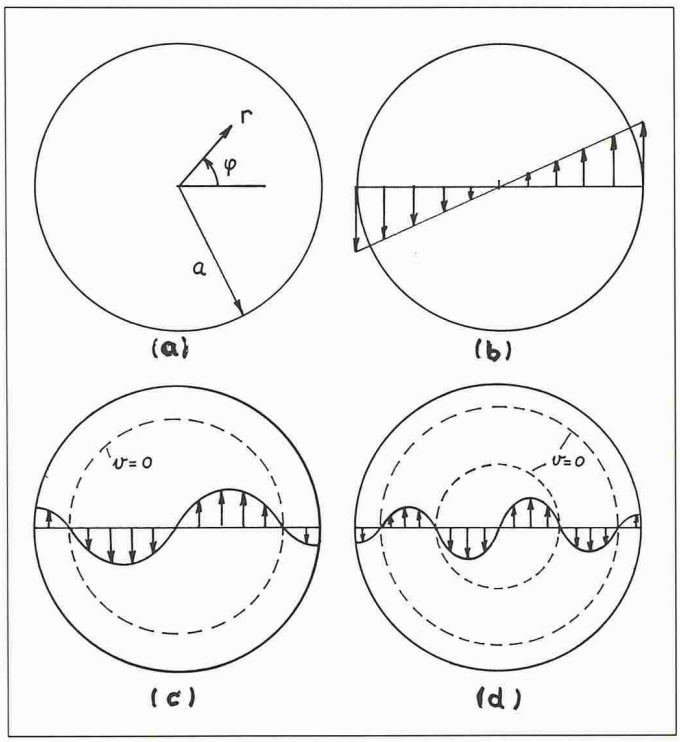


Bild 1. a = Querschnitt eines Torsionsstabes; b, c und d = radiale Verteilung der Partikelgeschwindigkeit im 1., im 2. und 3. Torsionsmode

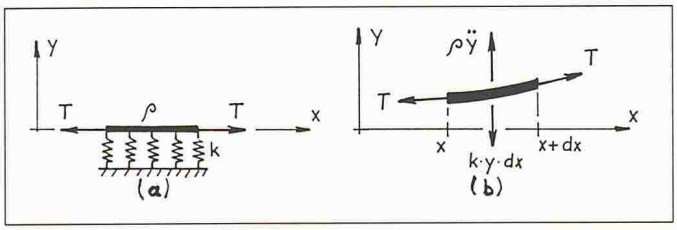


Bild 2. a = Elastisch gebettete Saite in der Ruhelage; b = Kräfte am infinitesimalen Element in allgemeiner Lage

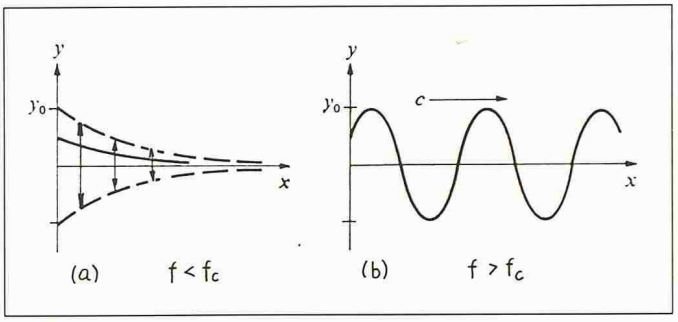


Bild 3. Erzwungene Bewegung einer halbunendlichen, elastisch gebetteten Saite, (a) unterhalb und (b) oberhalb der Cutoff-Frequenz

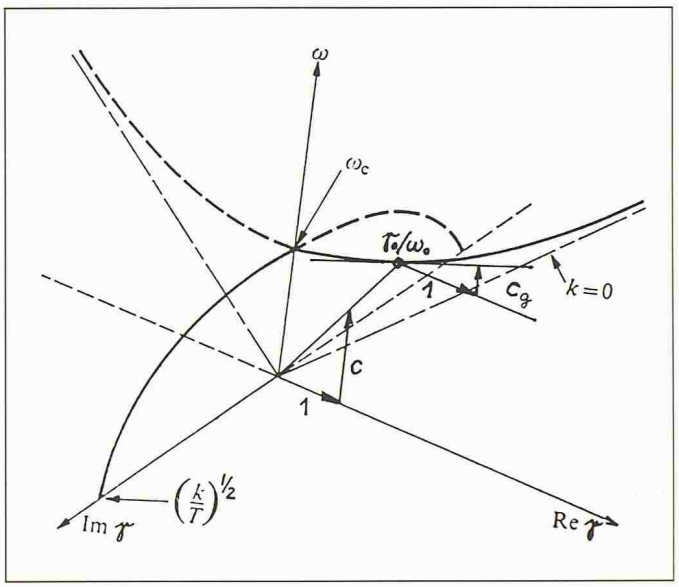


Bild 4. Frequenzenspektrum ω (γ) der elastisch gebetteten Saite. Phasengeschwindigkeit c und Gruppengeschwindigkeit c_g sind unmittelbar ablesbar

Folglich hat der betrachtete und der hier einzige mögliche Mode die Cutoff-Frequenz

$$(4)\quad \omega_c^2 = \frac{k}{T}c_o^2, \text{ d. h. } f_c = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\varrho}}.$$

Diese ist offensichtlich identisch mit der Eigenfrequenz der Schwingung der erstarrt gedachten Saite auf ihrer elastischen Bettung, die Saitenenden frei vorausgesetzt.

Wird eine «halbunendliche» Saite ($x > 0$) am Endquerschnitt $x = 0$ mit der Frequenz

$$\frac{\omega}{2\pi}$$

angeregt, so folgt für die Bewegung für

$$(5)\quad \omega < \omega_c: y(x,t) = y_o\, e^{-\bar{\gamma}x}\, e^{-i\omega t}$$

mit $\bar{\gamma}^2 = -\gamma^2$ ($\bar{\gamma}$: reell)

bzw. für

$$(6)\quad \omega > \omega_c: y(x,t) = y_o\, e^{i(\gamma x - \omega t)}$$

(γ: reell).

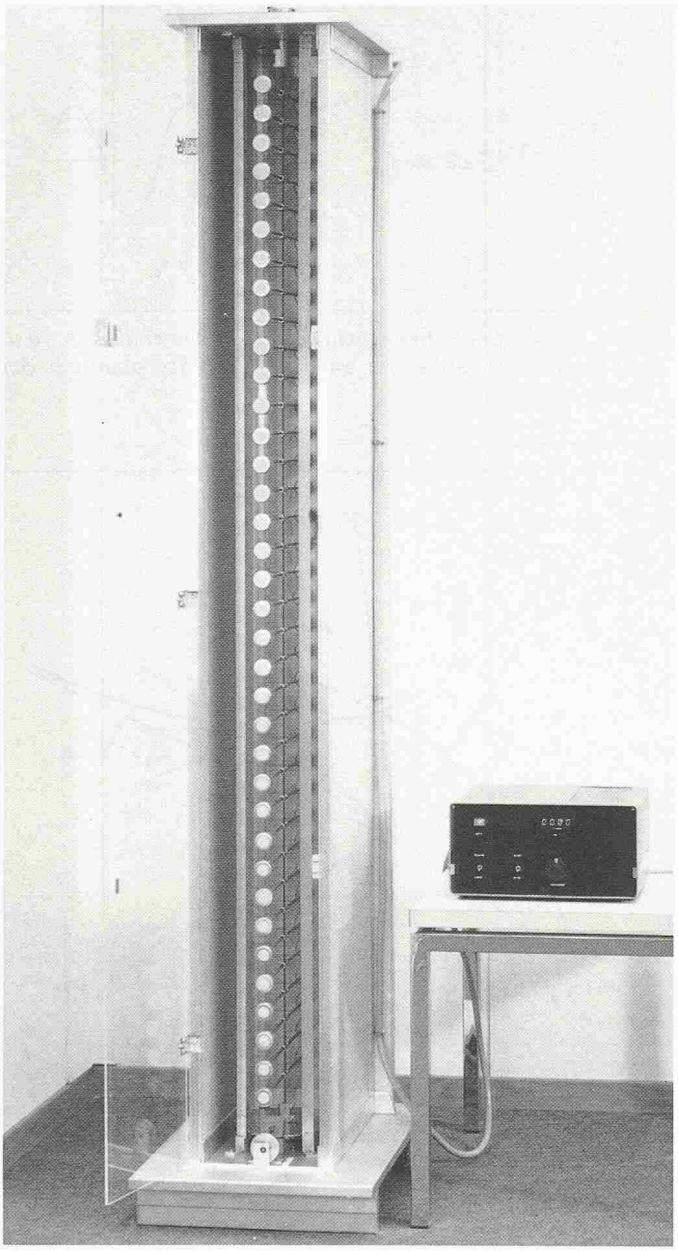
Im ersten Fall ergibt sich eine örtlich exponentiell abklingende Schwingung; alle Teilchen der Saite schwingen dabei in Phase (Bild 3a). Im zweiten Fall kann eine fortschreitende harmonische Welle beobachtet werden (Bild 3b). Einen Überblick über das Verhalten der Saite verschafft man sich am bequemsten anhand eines Frequenzenspektrums, d.h. anhand der Gleichung (3) in der Darstellung ω (γ) (Bild 4).

Betrachtet man einen Punkt (γ_o/ω_o) auf ω (γ) mit $\omega > \omega_c$, so entspricht die Steigung der Verbindungsgeraden vom Ursprung zu diesem Punkt gerade der Phasengeschwindigkeit c (ω_o). Dies ist die Geschwindigkeit, mit der die Nulldurchgänge von $y(x,t)$ in Bild 3b wandern. Anderseits liefert die Steigung der Tangente an ω (γ) im betrachteten Punkt per defintionem die Gruppengeschwindigkeit c_g (ω_o). Diese ist in Wellen, wie sie hier besprochen werden, die Geschwindigkeit, mit der Energie transportiert wird.

Wie Bild 4 entnommen werden kann, strebt für $\omega \to \omega_c^+$ c nach Unendlich, c_g hingegen nach Null. Für wachsende Frequenz fällt c ab und erreicht im Grenzfall $\gamma \to \infty$ gerade c_o, die Wellengeschwindigkeit einer ungebetteten, im übrigen aber identischen Saite. Für kürzer werdende Wellenlängen geht also der Einfluss der Bettung verloren; die aus der Saitenkrümmung resultierenden Rückstellkräfte, $Ty_{,xx}dx$, überwiegen dann mehr und mehr diejenigen der elastischen Bettung.

Das diskrete Modell

Die «Wellenmaschine» (Bild 5) ist im wesentlichen ein diskretes Modell einer elastisch gebetteten Saite. 37 hantelförmige Pendelstäbe sind in Abständen von 50 mm zueinander an einem dünnen Stahlband befestigt (ein Pendel-



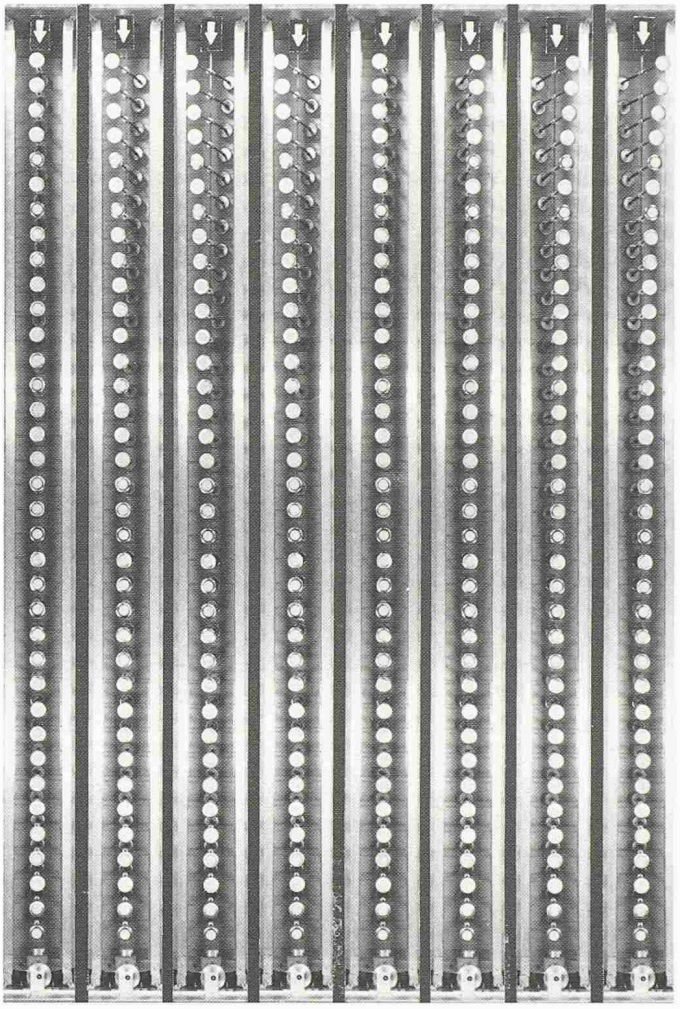


Bild 6. Das Verhalten der Pendelstäbe unterhalb der Cutoff-Frequenz. Alle Pendelstäbe schwingen in Phase, mit örtlich abklingenden Amplituden. (Die Pfeile markieren hier die Nullage.)

Bild 5. Das Modell der elastisch gebetteten Saite, mit Steuergerät

stab: zwei Massen à je 55 g, in je 150 mm Abstand von der vertikalen Achse. Stahlband: Querschnitt 0,4×10 mm, Länge 1,8 m). Im Gegensatz zu ähnlich aussehenden Modellen einer klassischen, d.h. ungebetteten Saite wird jeder Pendelstab von vier symmetrisch angeordneten Federn zusätzlich gehalten (Konstante einer Einzelfeder: 0,325 N/m). Für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage wirkt daher an jedem Pendelstab ein zum Auslenkungswinkel proportionales rückstellendes Kräftepaar (Moment).

Die Steifigkeit des Bandes in bezug auf eine Verdrehung zwischen zwei Pendelstäben, die resultierende Torsionssteifigkeit der vier Federn, die an einem Pendelstab angreifen, sowie das Trägheitsmoment eines solchen entsprechen, wenn man sie sich «verschmiert» denkt, den Parametern T, k sowie ϱ einer kontinuierlichen, elastisch gebetteten Saite.

Mit Hilfe eines Schrittmotors kann dem obersten Pendelstab eine sinusoidale Verdrehung aufgezwungen werden.

Der unterste Pendelstab ist durch eine Kupferplatte gleichen Trägheitsmomentes ersetzt. Diese bildet zusammen mit einem verschiebbar gelagerten Permanentmagneten eine Wirbelstrombremse, welche ein zur Winkelgeschwindigkeit proportionales Bremsmoment erzeugt. Der zeitliche Verlauf des Energieentzuges aus dem System entspricht damit für harmonische Wellen gerade dem Energieabfluss, der sich einstellen würde, wenn sich die Saite nach unten bis ins Unendliche erstreckte («Impedanzanpassung»).

Die erforderliche Dämpfungskonstante ist allerdings frequenzabhängig, folglich müsste die Stellung des Magneten für jede Frequenz neu justiert werden. Für $f < f_c$ sollte die Dämpfung Null sein, da dann im stationären Fall theoretisch keine Energie durch die Saite fliesst. Für $f > f_c$ wächst die erforderliche Dämpfung mit zunehmender Frequenz an und muss im Grenzfall $f \to \infty$ den konstanten Wert für ein entsprechendes ungebettetes System erreichen.

Praktisch wird für $f > f_c$ bei mittlerer Abstimmung der Dämpfung ein kleiner Anteil einer im unteren Lager einfallenden fortschreitenden Welle reflektiert. Die daraus resultierende Störung beeinträchtigt aber das zu demonstrierende Wellenbild nur unwesentlich. Eine Impedanzanpassung selbst für transiente Störungen wäre denkbar mit Hilfe eines Elektromagneten mit geregeltem Stromdurchfluss. Die Realisierung einer solchen Dämpfung hätte

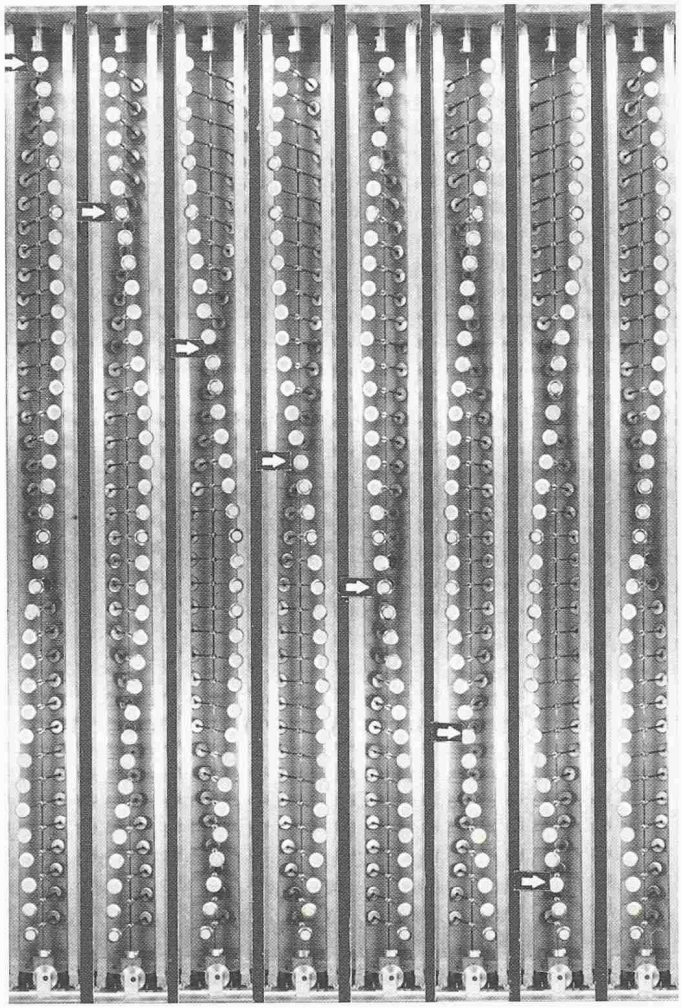


Bild 7. Das Verhalten der Pendelstäbe leicht oberhalb der Cut-off-Frequenz. Es sind sehr lange Wellen sichtbar, die relativ schnell laufen.

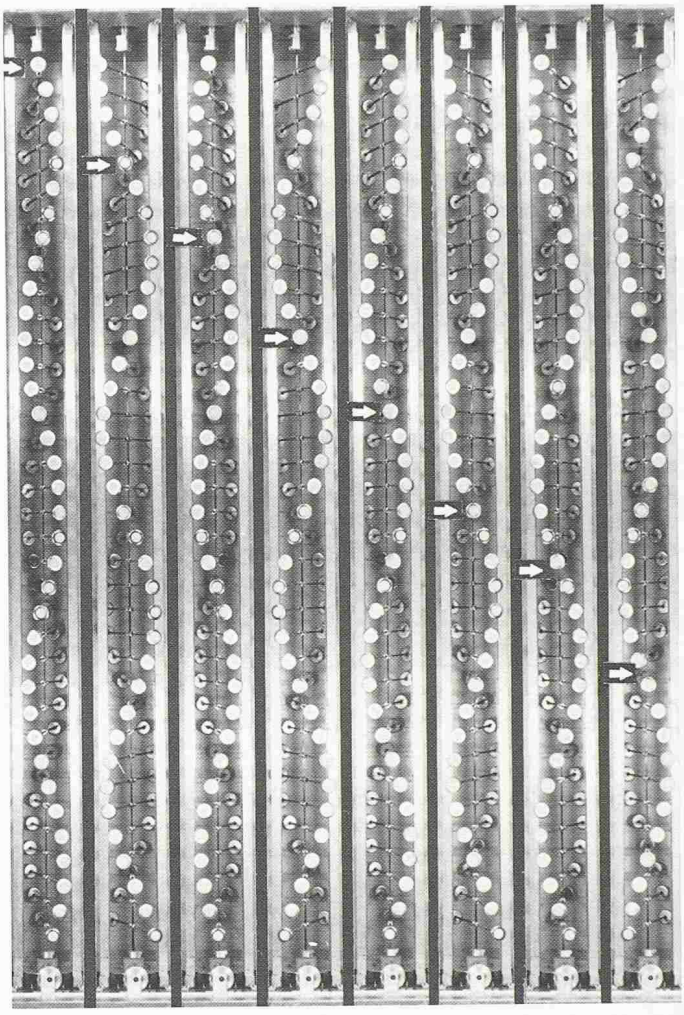


Bild 8. Hier sind die Wellen noch gut ein Drittel so lang wie in Bild 7, und die Phasengeschwindigkeit ist um einen Faktor 1,6 abgesunken. (Vergleiche die Lage der Pfeile, die das Fortschreiten eines «Nulldurchganges» hervorheben)

aber den vorgegebenen Rahmen gesprengt.

Beobachtungen am Modell

Die Bilder 6, 7 und 8 zeigen je acht Momentaufnahmen mit zeitlichen Abständen von ⅙ s. Das Modell ist jeweils über den obersten Pendelstab auslenkungsgesteuert sinusoidal angeregt worden, und zwar mit den Frequenzen 0,68 Hz (Bild 6), 0,87 Hz (Bild 7) und 1,5 Hz (Bild 8).

Die Cutoff-Frequenz des Modelles liegt bei f_c = 0,75 Hz. Wird nun der oberste Pendelstab sinusoidal angeregt – mit *langsam* steigender Frequenz, startend bei etwa 0,5 Hz, sowie mit ausgeschalteter Dämpfung im unteren Lager, solange $f < f_c$ ist –, so kann folgendes beobachtet werden:

Nach dem Abwandern anfänglicher höherfrequenter Anteile (Einschwingvorgang) schwingen alle Pendelstäbe in Phase. Ihre Amplituden hingegen werden von Stab zu Stab exponentiell kleiner (Bild 6). Mit steigender Frequenz schwächt sich das örtliche Abfallen der Schwingungsamplituden zusehends ab.

Für $f \to f_c^-$ erwartet man, dass alle Pendelstäbe mit gleicher Amplitude in Phase schwingen. Nun ist aber einerseits immer etwas Reibung im unteren Lager vorhanden, und anderseits klingt eine Störung knapp unterhalb von f_c, wie ja gerade gezeigt werden soll, örtlich kaum mehr ab. Es erstaunt daher nicht, dass sich das erwartete ideale Verhalten nur etwa in der oberen Hälfte des Modelles befriedigend einstellt. (Noch wenig unterhalb der Cutoff-Frequenz wirkt sich die Lagerreibung wegen des exponentiellen Amplitudenabfalls kaum störend aus).

Überschreitet man die Cutoff-Frequenz, so entsteht erstmals eine fortschreitende Welle (Bild 7). Mit weiter anwachsender Frequenz kann schliesslich ein deutliches Absinken der Phasengeschwindigkeit c beobachtet werden (Bild 8). Bei 0,78 Hz beträgt c etwa 2,5 m/s, bei 0,87 Hz (Bild 7) schon nur noch 1,6 m/s und bei 1,5 Hz (Bild 8) noch 1,0 m/s. Der Grenzwert $c = c_o$ für hohe Frequenzen schliesslich läge bei 0,9 m/s.

Regt man den obersten Pendelstab stossartig an, so kann die Dispersion, d.h. die Gestaltänderung der voranschreitenden Störung, auch unmittelbar gesehen werden.

Literatur

[1] *H. Kolsky:* «Stress Waves in Solids», Dover Publications, Inc., New York (1963)

[2] *K.F. Graff:* «Wave Motion in Elastic Solids», Ohio State University Press (1975)

Adresse der Verfasser: Dr. *K. Häusler* und Dr. *M.G. Koller*, Institut für Mechanik, ETH-Zentrum, 8092 Zürich.