Zusammengesetzte Holzstäbe mit unsymmetrischem zweiteiligem Querschnitt

Autor(en): **Dubas, Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Ingenieur und Architekt**

Band (Jahr): **106 (1988)**

Heft 9

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-85650

Bild 3. Brücke für Walderschliessungsstrassen

wicht der Untersuchungen an der ETH Zürich darin, das Verhalten einiger bereits ausgeführter Brücken zu beobachten.

Diese Bauweise bietet sich auch als effiziente Sanierungsmassnahme alter Holzfahrbahnen an. Durch versetzt angeordnete Brettstösse, vernagelt mit dem benachbart durchlaufenden Brett, sind Fahrbahnen grösserer Länge herstellbar. Derart vorgefertigte Platten lassen sich auf die bestehenden Querträger der zu reparierenden Brücke einschieben. Ebenso sind konfektionierte vorgespannte Plattenelemente aus Kanthölzern als Fahrbahntafeln mobiler Behelfsbrücken möglich.

Ein neues Selbstbewusstsein schaffen

Betrachten wir die heutigen Normen und die Art und Weise, wie sie gemeinhin angewendet werden, so ist ein gewisses Missverhältnis, sind Missverständnisse zwischen Ingenieur und Norm nicht zu übersehen. Die Identität und das Selbstverständnis des Ingenieurs sollte meines Erachtens heute neu überdacht werden. Fachkenntnis und Erfahrung des Ingenieurs müssen neben der Norm ihren angemessenen Platz wiederfinden. Bauweisen haben nur dann eine Zukunft, wenn durch innovative und kreative Ingenieurtätigkeit tatsächlich neue Lösungen angestrebt und gefunden werden und wenn diese mit Risikobereitschaft, Eigenverantwortlichkeit und Begeisterung angegangen und ausgeführt werden.

Adresse des Verfassers: *A. Steurer*, dipl. Bauing. ETH/SIA, Wissenschaftlicher Adjunkt am Institut für Baustatik und Stahlbau, ETH Hönggerberg, 8093 Zürich.

Dieser Text ist die überarbeitete Fassung eines Vortrags, gehalten am 5. Juni 1987 an der Dreiländer-Holztagung in Innsbruck.

Zusammengesetzte Holzstäbe mit unsymmetrischem zweiteiligem Querschnitt

In der Norm SIA 164 (1981) «Holzbau» sind im Abschnitt 3 32 3 Formeln für die Berechnung zusammengesetzter Druckstäbe angegeben. Für den zweiteiligen Querschnitt gilt die unter 3 32 33 enthaltene Beziehung für J_{eff} allerdings nur, falls die y-Achse eine Symmetrieachse darstellt. Der für einfachsymmetrische Querschnitte verallgemeinerte Ausdruck soll deshalb angegeben werden.

Zudem werden Biegestäbe mit einem ähnlichen Querschnitt untersucht. Es zeigt sich dabei, dass die in der Norm aufgeführten bzw. berichtigten Beziehungen, die einer sinusförmigen Momentenverteilung entsprechen, auch bei Trägern unter konstanter Querbelastung eine gute Näherung darstellen.

Für den zweiteiligen Querschnitt, mit den Bezeichnungen nach Bild 1 (grundsätzlich entsprechend der Norm

VON PIERRE DUBAS, ZÜRICH

SIA 164), geht die von STÜSSI bereits 1947 [1] abgeleitete Beziehung (S. 264) beim Übergang auf unendlich kleine Abstände zwischen den Verbindungsmitteln mit dem Verschiebungsmodul

$$c^* = C \cdot n_V / \ell$$

pro Längeneinheit (n_V = Anzahl der Verbindungsmittel über die Stablänge ℓ) in folgende Differentialgleichung:

$$L'' - \omega^2 \cdot L + \gamma \cdot M = 0$$

$$\text{mit } \omega^2 = \frac{c^*}{E} \cdot \frac{A_1 \cdot a_1 \cdot (h/2) + \Sigma J_i}{A_1 \cdot (2a_1/h) \cdot \Sigma J_i}$$

$$\gamma = \frac{c^* \cdot (h/2)}{E \cdot \Sigma J_i}$$

$$\text{und } a_1 = \frac{A_2 \cdot (h/2)}{A_1 + A_2}$$

Der Ausdruck im Zähler der Beziehung für ω^2 entspricht dem Trägheitsmoment J_{tot} (in [1] als J_n bezeichnet) des Querschnittes mit starrer Fuge, d. h. dem nach der klassischen Biegelehre ermittelten Querschnittswert.

In der obenstehenden Form gilt die Differentialgleichung auch für andere Querschnittsanordnungen, mit entsprechenden Beziehungen für ω^2 und γ. Für den dreiteiligen symmetrischen Querschnitt sei auf [1], S. 259, sowie auf [2], S. 136, hingewiesen.

Lösung der Differentialgleichung für einfache Momentenverteilungen

Sinusförmige Momentenverteilung

Mit $M = M_m \cdot \sin\pi\, x/\ell$ ergibt sich für die Kantenkraft L, d. h. für die Normalkraft eines der beiden Querschnittsteile, mit dem Ansatz

$$L = L_m \cdot \sin\pi\, x/\ell$$

nach einfachen Zwischenrechnungen (analog zu [2], S. 136)

$$L = M \frac{a_1 \cdot A_1}{J_{eff} \cdot (1 + k)}$$

$$\text{mit } k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A_1}{c^* \cdot \ell^2} \cdot \frac{2a_1}{h} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A_1}{c \cdot \ell^2}$$

d. h., unter Berücksichtigung der Wertigkeit n_F der Fuge nach Figur 16 bzw. mit

$$c = (n_V \cdot C)/(n_F \cdot \ell)$$

genau die Beziehung nach Ziffer *3 32 33* der Norm. Für den betrachteten unsymmetrischen zweiteiligen Querschnitt ist dagegen die Formel für J_{eff} zu berichtigen und lautet:

$$J_{eff} = \Sigma J_i + \frac{a_1 \cdot (h/2) \cdot A_1}{1 + k}$$

Für einen zweiteiligen symmetrischen Querschnitt wird

$$h/2 = 2a_1$$

man erhält dann die in der Norm aufgeführte Formel.

Bei reiner Biegung ergeben sich die Spannungen der zwei Querschnittsteile aus der Beziehung

$$1/\rho = M/EJ_{eff}$$

$$\text{zu } \sigma_{1\,\substack{sup\\inf}} = -\frac{L}{A_1} \mp \frac{M \cdot h_1/2}{J_{eff}}$$

$$\sigma_{2\,\substack{sup\\inf}} = \frac{L}{A_2} \mp \frac{M \cdot h_2/2}{J_{eff}}$$

Setzt man L ein, ergeben sich die folgenden nur von M abhängigen Ausdrücke, mit:

$$a_2 = a_1 \cdot A_1/A_2,$$

$$\sigma_{1\,\substack{sup\\inf}} = -\frac{M}{J_{eff}}\left(\frac{a_1}{1 + k} \pm \frac{h_1}{2}\right)$$

$$\sigma_{2\,\substack{sup\\inf}} = \frac{M}{J_{eff}}\left(\frac{a_2}{1 + k} \mp \frac{h_2}{2}\right)$$

Parabelförmige Momentenverteilung

Die Kantenkraft beträgt hier (vgl. z. B. [1], S. 259), wobei die Abszissen x von der Balkenmitte aus gemessen werden,

$$L = \frac{\gamma}{\omega^2}\left[M - \frac{q}{\omega^2}\left(1 - \frac{Ch\,\omega\, x}{Ch\,\omega\,\ell/2}\right)\right]$$

mit den oben angegebenen Werten für γ und ω^2, bzw. mit

$$\frac{\gamma}{\omega^2} = \frac{A_1 \cdot a_1}{A_1 \cdot a_1 \cdot (h/2) + \Sigma J_i} = \frac{A_1 \cdot a_1}{J_{tot}} = \frac{S_{max}}{J_{tot}}$$

S_{max} = maximales statisches Moment bezüglich der Schwerachse y (Verbindung starr).

Zur Bestimmung der Biegespannungen der zwei Einzelteile ist zuerst das nicht von der Kantenkraft L aufgenommene Moment $M - L \cdot (h/2)$ im Verhältnis $J_i/\Sigma J_i$ auf die Teile 1 und 2 aufzuteilen. Man kann auch leicht zeigen, dass die für die sinusförmige Verteilung angegebenen Ausdrücke (erste Form) gültig bleiben, wenn man für J_{eff} folgende Beziehung verwendet:

$$J_{eff} = \frac{\Sigma J_i}{1 - (L \cdot h/2)/M}$$

Dieser Wert ist längs der Spannweite veränderlich, so dass im Vergleich zum für die Sinusverteilung konstanten Wert J_{eff} die praktische Anwendbarkeit, z. B. für die Ermittlung von Durchbiegungen, beschränkt ist.

Zahlenbeispiel

Angenommener Querschnitt

Biegeträger aus Holz mit einer nachgiebigen Verbindung zwischen den Einzelteilen sind in der Regel nicht wirtschaftlich, weil der Wirkungsgrad im Vergleich zu einem einheitlichen Querschnitt, wie dies auch beim Brettschichtholz vorausgesetzt werden darf, relativ schlecht ist (vgl. z. B. [2], S. 295). Eine Ausnahme bilden vielleicht Verbundträger, die aus einer Betonplatte mit daran verdübelten Holzbalken bestehen. Eine solche Lösung kommt unter anderem bei der Verstärkung einer Balkenlage in Frage; sie ist z. B. in [3] beschrieben. Als Beispiel wird deshalb der in Bild 2 gezeigte Querschnitt gewählt, der grundsätzlich den in [3] beschriebenen Versuchsträgern entspricht. Das Verhältnis E_{beton}/E_{holz} wird dabei zu 2 festgelegt, d. h. es wird mit einem äquivalenten 1500 mm breiten Holzgurt gerechnet. Zudem gilt gemäss [3] E_{holz} = 12 000 N/mm^2.

Der Verschiebungsmodul C der Nagelung wird aufgrund von Bild 16 in [3] und in Anlehnung an die Norm *SIA 164* zu:

$$C = 100 \cdot d^{1,7} \text{ (in N/mm, mit } d \text{ in mm)}$$

geschätzt. Werden 40 Nägel d = 4,5 mm pro Laufmeter angeordnet, so ergibt sich der Verschiebungsmodul pro Längeneinheit c^* zu rund 52 N/mm^2. Zum Vergleich werden auch grössere bzw. kleinere Werte berücksichtigt. Die Spannweite der einfach gelagerten Konstruktion beträgt 4500 mm, die gleichmässig verteilte Belastung 4 N/mm, so dass sich das Biegemoment in Balkenmitte zu $10{,}125 \cdot 10^6$ N · mm ergibt.

Bild 1. Zweiteiliger Querschnitt

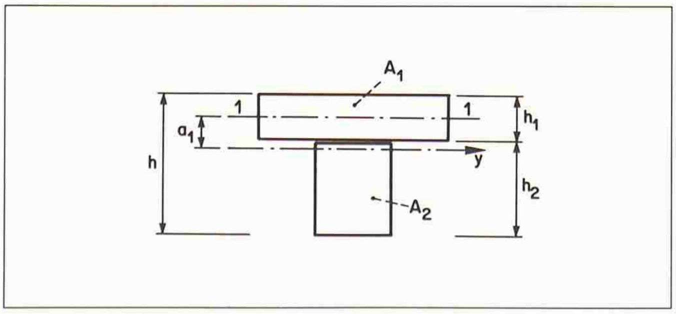
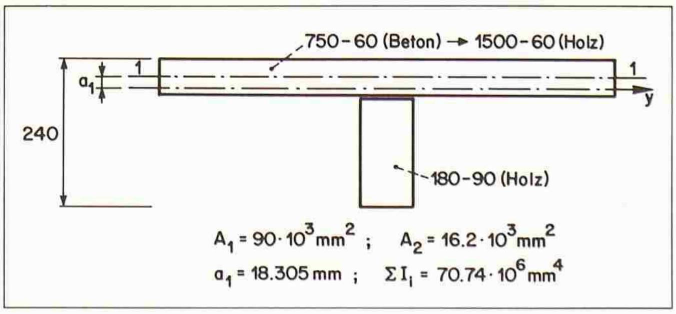


Bild 2. Querschnitt eines Verbundträgers mit Betonplatte und daran verdübelten Holzbalken



c^*	∞	208	104	52	26	0
$\sigma_{1,sup}$	−1,82	−2,05	−2,24	−2,54	−2,93	− 4,29
$\sigma_{1,inf}$	0,44	0,80	1,09	1,56	2,17	4,29
$\sigma_{2,sup}$	0,44	−0,79	−1,81	−3,41	−5,54	−12,88
$\sigma_{2,inf}$	7,23	7,75	8,19	8,86	9,77	12,88

Tabelle 1. Spannungen bei sinusförmig angenommener Momentenverteilung

c^*	∞	208	104	52	26	0
$\sigma_{1,sup}$	−1,82	−2,02	−2,20	−2,50	−2,90	− 4,29
$\sigma_{1,inf}$	0,44	0,75	1,04	1,50	2,12	4,29
$\sigma_{2,sup}$	0,44	−0,64	−1,62	−3,21	−5,36	−12,88
$\sigma_{2,inf}$	7,23	7,69	8,11	8,78	9,69	12,88

Tabelle 2. Spannungen für die tatsächliche parabelförmige Momentenverteilung

Spannungen bei sinusförmig angenommener bzw. bei parallelförmiger Momentenverteilung

Die parabelförmige Momentenfläche wird zuerst als sinusförmig genähert. Mit den oben angegebenen Formeln erhält man in Balkenmitte die in Tabelle 1 dargestellten Spannungen in N/mm² für verschiedene Werte des Parameters c^*. Die für den Teil 1 angegebenen Spannungen sind auf Holz bezogen. Für die angenommene Betonplatte wären sie mit dem Faktor 2 zu multiplizieren.

Die Spannungen in N/mm² für die tatsächliche parabelförmige Momentenverteilung sind in Tabelle 2 aufgeführt. Sie beziehen sich auf die Balkenmitte, mit $Ch\omega x = 1$.

Vergleich der beiden Lösungen

Für die massgebende Spannung $\sigma_{2,inf}$ betragen die Unterschiede maximal rund 1%, wobei die wesentlich weniger aufwendige und übersichtliche Sinus-Näherung auf der sicheren Seite liegende Resultate liefert. Es zeigt sich zudem, dass die Ergebnisse beider Verfahren praktisch übereinstimmen, wenn man für die Sinusverteilung im Bereich $c^* < 75$ einen rund 7,5% erhöhten Verschiebungsmodul einführt. Die möglichen Streuungen der C-Werte liegen aber weit höher, so dass sich in der Regel die Benützung der arbeitsintensiveren Formeln für die Parabelverteilung kaum lohnt. Selbstverständlich sind ausserhalb der Balkenmitte die Unterschiede teilweise grösser; diese Querschnitte sind aber nicht massgebend.

Mit einer FOURIER-Zerlegung lässt sich zudem die Genauigkeit der Sinus-Näherung noch steigern. Dabei wird die parabelförmige Momentenfläche durch folgende Sinusverteilungen ersetzt:

- Sinushalbwelle über die Spannweite ℓ, mit einem Wert $1{,}03 \cdot M_m$ in Balkenmitte
- Drei Sinushalbwellen über ℓ, mit einem Wert von $-0{,}03 \cdot M_m$ in Balkenmitte und von $0{,}03 \cdot M_m$ für die Sechstelpunkte. Dabei ist der k-Wert mit $\ell/3$ zu ermitteln, d. h. k ist hier neunmal grösser als für die Hauptwelle.

Nach Superposition der entsprechenden Spannungsanteile zeigt es sich, dass in Balkenmitte die Unterschiede zur genauen Lösung für $\sigma_{2,inf}$ höchstens 0,05% betragen, so dass auf eine Wiedergabe der Ergebnisse verzichtet werden kann.

Bestimmung des Schubflusses in der Verbundfuge

Da die angegebenen Formeln nur für eine gleichmässig verteilte Verdübelung gelten, d. h. für c = konstant entlang der Spannweite ℓ, genügt für die Bemessung die Kenntnis des grössten Schubflusses, über dem Auflager.

Der Schubfluss t entspricht der ersten Ableitung der Kantenkraft L und ergibt sich somit für eine parabelförmige Momentenverteilung zu

$$t = \frac{dL}{dx} = \frac{\gamma}{\omega^2}\left(V - \frac{q}{\omega}\frac{Sh\omega x}{Ch\omega\ell/2}\right)$$

wobei das zweite Glied im Klammerausdruck die Abminderung durch die Verformbarkeit der Schubsicherung darstellt.

Für den massgebenden Schubfluss, d. h. für $x = \ell/2$, ist als Querkraft V die Auflagerkraft $q\ell/2$ einzusetzen. Durch die Integration des Schubflusses zwischen Auflager und Balkenmitte ergibt sich wieder L. Da diese Kantenkraft L bekannt ist, hängt der maximale Schubfluss nur von der Verteilung entlang der halben Spannweite ab. Vergleichsrechnungen mit dem Zahlenbeispiel und mit anderen Querschnittsabmessungen zeigen, dass der massgebende Schubfluss t_{max} in der Form

$$t_{max} = \zeta \cdot L/\,(\ell/2)$$

ausgedrückt werden kann, wobei der Koeffizient ζ etwa zwischen 1,8 (relativ steife Verdübelung) und 1,6 (weiche Verdübelung) variiert. Für den Grenzfall der starren Verbindung, mit einer dem Querkraftverlauf entsprechenden linearen Schubflussverteilung $t = V \cdot \gamma/\omega^2 = V \cdot S_{max}/J_{tot}$ wird selbstverständlich $\zeta = 2$.

Für die in Frage kommenden Verdübelungssteifigkeiten darf somit der massgebende Schubfluss zu $3{,}5 \cdot L/\ell$ angenommen werden.

Durchbiegung in Balkenmitte

Für die Durchbiegung in Balkenmitte führt das Sinusverfahren zu einer sehr einfachen Lösung: man erhält für q = konstant

$$w_m = \frac{5 \cdot q \cdot \ell^4}{384 \cdot EJ_{eff}}$$

Ein Vergleich mit den genauen Werten zeigt, dass der Fehler höchstens rund 0,3% beträgt: die gegenüber den Spannungen in Balkenmitte noch bessere Genauigkeit lässt sich durch die glättende Wirkung der Integration erklären.

Der Vollständigkeit halber soll noch die «genaue» Formel angegeben werden, bei der die Wirkung des entlastenden Momentes $L \cdot (h/2)$ mit dem Wert L für die parabelförmige Momentenverteilung ermittelt wird:

$$w_m = \frac{5q\ell^4}{384E \cdot \Sigma J_i} - \frac{q(h/2)}{E \cdot \Sigma J_i}\frac{\gamma}{\omega^2}\left[\frac{\ell^2}{8}\left(\frac{5\ell^2}{48} - \frac{1}{\omega^2}\right) + \frac{1}{\omega^4}\left(1 - \frac{1}{Ch\omega\ell/2}\right)\right]$$

Schlussfolgerungen

Die in der Norm *SIA 164* (Abschnitt *3 32 3*) angegebenen Formeln für zusammengesetzte Stäbe gelten an sich nur bei einer sinusförmigen Momentenverteilung, wie sie beim Knicken eintritt, und zudem für doppeltsymmetrische Querschnitte. Mit dem für den zweiteiligen unsymmetrischen Querschnitt, nach Figur 15a der Norm, oben angegebenen berichtigten Ausdruck für das effektive Trägheitsmoment J_{eff} dürfen diese Beziehungen mit guter Näherung auch bei einfach gelagerten, gleichmässig belasteten Biegeträgern mit nachgiebiger Verbindung zwischen den Einzelteilen benützt werden.

Adresse des Verfassers: Prof. Dr. *P. Dubas*, Institut für Baustatik und Stahlbau, ETH-Hönggerberg, 8093 Zürich.

Literatur

[1] *Stüssi, F.*: Zusammengesetzte Vollwandträger. Abh. IVBH, Band 8, Zürich 1947, S. 249

[2] Einführung in die Norm *SIA 164* (1981), Holzbau. Publikation Nr. 81-1, Baustatik und Stahlbau, ETHZ, Zürich 1981

[3] *Godycki, T., Pawlica, J.* und *Kleszczewski, J.*: Verbunddecke aus Holzrippen und Betonplatte. Bauingenieur 59 (1984), S. 477