§3. Application to SL(2)-embeddings

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

This finishes Case 3. Thus we know all the embeddings into $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ and $\mathbf{F}_n$, $n \geqslant 1$. The comments after Theorem 2.1 are easily verified by checking each embedding. This finishes the proof of the theorem. □

Remarks.

(1) Note that — as to be expected — all the embedding into $\mathbf{F}_1$ are obtained by blowing up the embeddings into $\mathbf{P}^2$ at fixed points.

(2) The "exceptional" embeddings, i.e. those with only one fixed point, are of special interest, because this phenomenon does not occur for smooth complete embeddings of tori. (See [KKMS] for a reference on torus embeddings.)

§ 3. Application to $SL(2)$-embeddings

In [LV] a combinatorical method is presented in order to classify all normal $SL(2)$-embeddings. A natural question is how to classify those which are smooth and complete to obtain a *geometrical* realization. We now sketch how the result of this article is useful for this. (For further details see [JM].)

Given a B/Γ-embedding X, we construct an $SL(2)/\Gamma$-embedding in the following way. Consider the B-action on $SL(2) \times X$ given by

$$b \cdot (s, x) = (sb^{-1}, bx)$$

where $b \in B$, $s \in SL(2)$, and $x \in X$. Denote by $SL(2)*_B X$ the variety obtained by quotienting by this action. The action of $SL(2)$ on this variety by left multiplication endows it with the structure of an $SL(2)/\Gamma$-embedding. The projection $SL(2) \times X \to SL(2)$ induces a locally trivial fibre bundle $SL(2)*_B X \xrightarrow{p} SL(2)/B \cong \mathbf{P}^1$. The morphism p is $SL(2)$-equivariant, and the fibre of p is B-isomorphic to X. So we see that for studying the geometry of the $SL(2)/\Gamma$-embeddings of this form it is useful to study the B/Γ-embeddings.

As for general $SL(2)/\Gamma$-embeddings one finds the following essential result. Let Γ be a finite cyclic subgroup of $SL(2)$. Let V be a smooth $SL(2)/\Gamma$-embedding with orbit Y. Then there exists a Borel subgroup B of $SL(2)$ containing Γ and an $SL(2)$-stable open neighborhood of Y in V which is of the form $SL(2)*_B X$ for some smooth B/Γ-embedding X. Thus all smooth $SL(2)/\Gamma$-embeddings are *locally* of the form above. Also any smooth B/Γ-embedding can be completed to a smooth embedding. Thus it is enough to study the complete ones.

We can use this fact, for example, to study blow-ups of orbits, since blowing up is a local property. Thus we can find the minimal $SL(2)/\Gamma$-embeddings. This is done in [JM], Chapter IV, for $\Gamma = \{e\}$ and $\Gamma = \{\pm e\}$.

REFERENCES

[Beau] BEAUVILLE, A. *Surfaces Algébriques Complexes.* Soc. Math. de France, (Astérisque 54) Paris, 1978.

[Bor] BOREL, A. *Linear Algebraic Groups.* W. A. Benjamin, New York, 1969.

[Ful] FULTON, W. *Intersection Theory.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.

[G-H] GRIFFITHS, P. and J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley and Sons, New York, 1978.

[Gro] GROTHENDIECK, A. Torsion, homologie et sections rationnelles. *Séminaire Chevalley, Anneaux de Chow et Applications,* Secrétariat Math., Paris, 1958.

[Har] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977.

[H-O] HUCKLEBERRY, A. and E. OELJEKLAUS. *Classification Theorems for Almost Homogeneous Spaces.* Revue de l'Institut Elie Cartan 9, Université de Nancy, 1984.

[JM] JAUSLIN-MOSER, L. *Normal Embeddings of $SL(2)/\Gamma$.* Thesis, Université de Genève, Geneva, 1987.

[Kam] KAMBAYASHI, T. Projective Representation of Algebraic Linear Groups of Transformations. *Amer. J. Math. 88* (1966), 199-205.

[KKMS] KEMPF, G., F. KNUDSEN, D. MUMFORD and B. SAINT-DONAT. *Toroidal Embeddings 1.* Lect. Notes in Math. #339, Springer-Verlag, 1974.

[LV] LUNA, D. et Th. VUST. Plongements d'espaces homogènes. *Comment. Math. Helv. 58* (1983), 186-245.

[Mum] MUMFORD, D. *Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties.* Springer-Verlag, New York, 1976.

[O-W] ORLIK, P. and Ph. WAGREICH. Algebraic Surfaces with k^*-actions. *Acta Mathematica 138* (1977), 43-81.

[Pop] POPOV, V. L. Classification of Affine Algebraic Surfaces that are Quasi-homogeneous with respect to an Algebraic Group. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 37 (No. 5)* (1973), 1039-1055.

[Pot] POTTERS, J. On Almost Homogeneous Compact Complex Analytic Surfaces. *Inv. Math. 8* (1969), 244-266.

[Saf] ŠAFAREVIČ, I. R. *Algebraic Surfaces.* Proceedings of the Steklov Institute of Math. No. 75, 1965.

(Reçu le 23 février 1988)

Lucy Moser-Jauslin

Section de Mathématiques
Université de Genève
Case postale 240
CH-1211 Genève 24
(Suisse)