

# Sonne und Schatten

Autor(en): **Maier, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **80 (1962)**

Heft 46

PDF erstellt am: **16.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-66265>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Sonne und Schatten

DK 628.9.021

Von Paul Maier, dipl. El.-Ing., Schaffhausen

Anlässlich der Untersuchung über den Schattenwurf eines Gebäudes wurden die für die exakte Schatten-Konstruktion nötigen Unterlagen aus verschiedenen Quellen zusammengetragen. Aus den Angaben der Abschnitte 1 und 2 können u. a. die Dauer der Besonnung von Gebäudefassaden, der Schattenwurf von Gebäuden und die Sonneneinstrahlung durch Sheddächer konstruiert werden. Die Abschnitte 3 bis 8 haben ergänzenden Charakter. Sie dienen der Erläuterung des Rechenvorganges und für die Zeitkorrektur. Sie erlauben aber auch die Lösung komplizierterer Aufgaben, wie Bestimmung des Sonnenunterganges hinter einem erhöhten Horizont, Berechnung einer Sonnenuhr und astronomische Zeitbestimmung.

### 1. Der Schatten eines Stabes

Ein Stab stehe senkrecht auf einer horizontalen Ebene und werfe seinen Schatten auf diese Ebene. Der Stab sei 1 m hoch. Der Schatten seines oberen Endes habe, vom untern Ende aus gemessen, den Abstand  $x$  in nördlicher Richtung und den Abstand  $y$  in westlicher Richtung (den Abstand  $-x$  in südlicher und  $-y$  in östlicher Richtung). Die Werte für  $x$  und  $y$  in Metern wurde berechnet und in Tabelle 1 zusammengestellt. Die angegebenen Werte gelten für eine nördliche Breite von  $\varphi = 47,7^\circ$  (Schaffhausen). Für die Nachmittags-

stunden von 12.00 bis 19.00 werden die angegebenen  $y$ -Werte negativ.

Werden für verschiedene Monate die Schattenpunkte für die gleiche Tageszeit aufgezeichnet, so liegen diese Punkte auf einer Geraden. Jeder Tageszeit entspricht eine andere Verbindungsgerade. Diese Verbindungsgeraden laufen alle durch den Punkt

$$x = -\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) = -0,9099 \quad y = 0$$

Diese Tatsache kann zur Kontrolle der aufgezeichneten Punkte verwendet werden.

In Bild 1 sind die Schattenspuren für einen Stab von etwa 15 mm Höhe dargestellt.

### 2. Konstruktion des Verlaufs der Beschattung

Mit der Tabelle 1 kann der Schattenwurf auf das Umgelände und auf die Fassaden benachbarter Gebäude in Abhängigkeit der Tageszeit und der Jahreszeit aufgezeichnet werden.

21. Orientierung des Situationsplanes: Süden oben am Blatt, Norden unten am Blatt, oder umgekehrt. Von der exakten Orientierung der Gebäude in bezug auf die Nord-Südrichtung hängt die Genauigkeit der Resultate ab. Kleine Winkelabweichungen fälschen die Verhältnisse schon merklich. Die auf dem Situationsplan angegebene Nord-Süd-

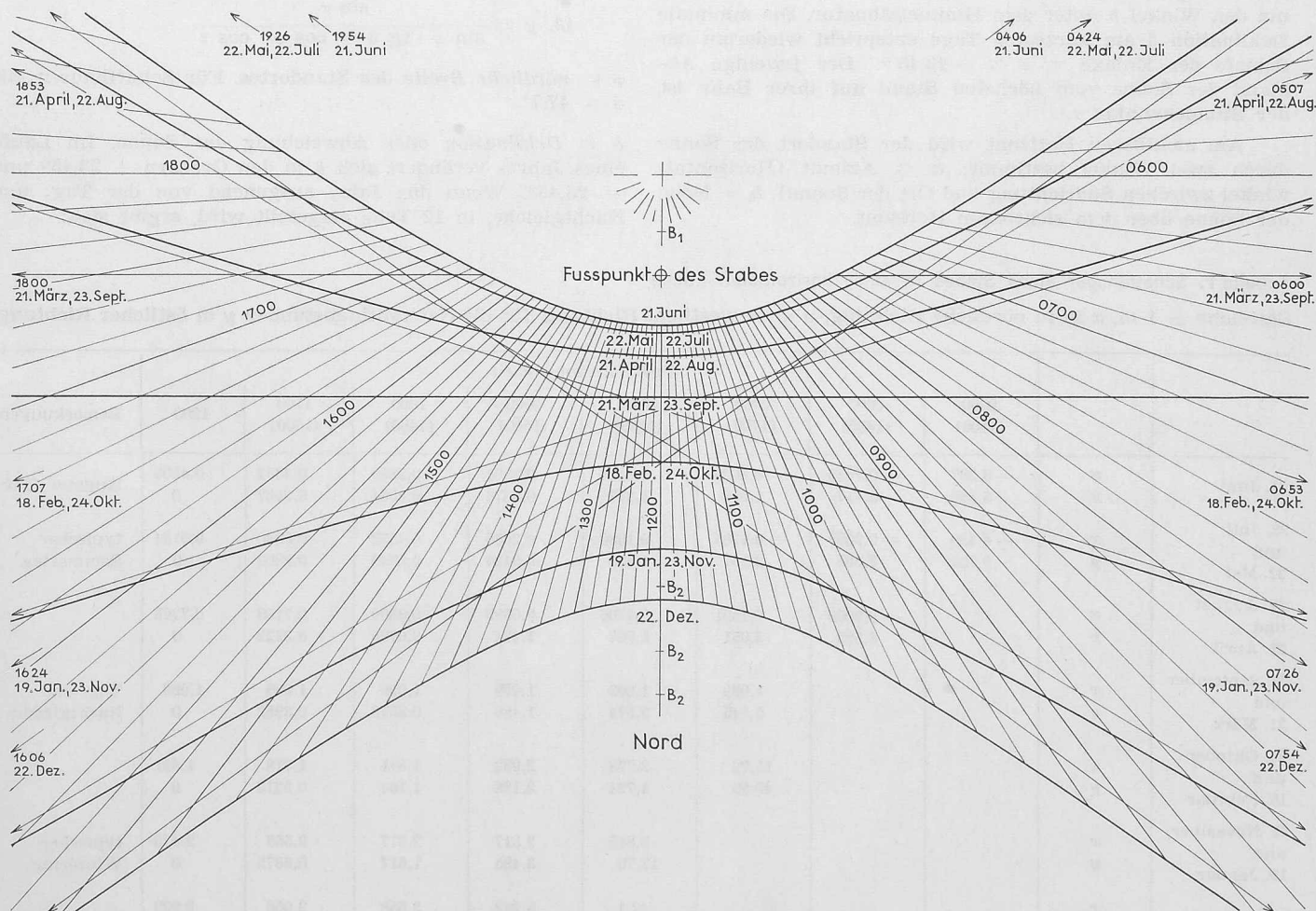


Bild 1. Schattenspuren eines Stabes für geogr. Breite  $\varphi = 47,7^\circ$ , Höhe des Stabes rd. 15 mm, Zeitangaben: wirkliche Sonnenzeit

richtung sollte auf Richtigkeit überprüft werden, z. B. anhand der Landeskarte 1:25 000.

## 22. Vereinfachung komplizierter Umriss.

23. Wahl eines markanten Punktes für jede Dachhöhe und Konstruktion seiner Schattenspur in der Grundrissebene mittelst der  $x$ - und  $y$ -Werte,  $x$  und  $y$  gelten für eine Höhe von 1 m; sie müssen daher mit der Gebäudehöhe in m multipliziert werden.

24. Einen guten Einblick in die Verhältnisse während des ganzen Jahres gibt die *Schattenspur* eines mittleren Wintertages (19. Januar/23. November), der Tag- und Nachtgleiche (21. März/23. September) und eines mittleren Sommertages (22. Mai/22. Juli). Die extremen Werte treten am Tag der Sommersonnenwende (21. Juni) und am Tage der Wintersonnenwende (22. Dezember) auf.

25. Durch Verschieben der Schattenspur parallel zu den Dachgrundrissen kann für jeden Punkt in der Grundrissebene die *Beschattung* festgestellt werden.

26. Aus den rechtwinkligen Dreiecken, bestehend aus Sonnenstrahl, Projektion des Sonnenstrahls in die Grundrissebene und Höhe des entsprechenden Daches kann der *Beschattungsverlauf in den Gebäudefassaden* ermittelt werden.

## 3. Die Bewegung der Sonne

Bei Tag- und Nachtgleiche (21. März und 23. September) bewegt sich die Sonne auf dem Himmelsäquator. Die Schnittpunkte des Himmelsäquators mit dem sichtbaren Horizont sind die Orte des Sonnenaufganges bzw. des Sonnenunterganges. Der Winkel zwischen dem Himmelsäquator und dem sichtbaren Horizont entspricht der geographischen Breite (für Schaffhausen  $\varphi = 47,7^\circ$ ).

Im Sommer steht die Sonne um den Winkel  $\delta$  (Deklination) über dem Himmelsäquator. Die maximale Deklination am längsten Tag entspricht der Schiefe der Erdaxe (Ekliptik =  $\varepsilon = 23,45^\circ$ ). Im Winter steht die Sonne um den Winkel  $\delta$  unter dem Himmelsäquator. Die minimale Deklination  $\delta$  am kürzesten Tage entspricht wiederum der Schiefe der Erdaxe =  $\varepsilon = -23,45^\circ$ . Der jeweilige Abstand der Sonne vom höchsten Stand auf ihrer Bahn ist der Stundenwinkel  $\tau$ .

Am sichtbaren Horizont wird der Standort der Sonne durch zwei Winkel bestimmt:  $a$  = Azimut (Horizontalwinkel zwischen Südrichtung und Ort der Sonne),  $h$  = Höhe der Sonne über dem sichtbaren Horizont.

Im nautischen Dreieck gelten zwischen den fünf erwähnten Winkeln folgende Beziehungen (sphärische Trigonometrie):

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau$$

$$\sin a = \frac{\sin \tau \cdot \cos \delta}{\cos h}$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \cdot \sin h - \cos \varphi \cdot \cos h \cdot \cos a$$

und im Speziellen:

für 12.00 h (Mittag):

$$\tau = 0 \quad a = 0 \quad h = 90^\circ - \varphi + \delta$$

$$\text{und für } \varphi = 47,7^\circ$$

$$h = 42,3^\circ + \delta$$

für Sonnenaufgang und Sonnenuntergang bei ebenem Horizont:

$$h = 0$$

$$\cos \tau = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

$$\sin a = \frac{\sin \tau \cdot \cos \delta}{\sin \delta}$$

$$\cos a = -\frac{\cos \varphi}{\cos \delta}$$

## 4. Berechnung der $x$ - und $y$ -Werte

Die Werte von  $x$  und  $y$  hängen ab von der Jahreszeit (Deklination der Sonne =  $\delta$ ), der Tageszeit (Stundenwinkel =  $\tau$ ) und der geographischen Breite (nördliche Breite =  $\varphi$ ). Aus den Formeln der ebenen und der sphärischen Trigonometrie ergeben sich folgende Beziehungen:

$$41. x = \operatorname{tg}(\varphi - \delta')$$

$$\text{wobei } \operatorname{tg} \delta' = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \tau}$$

$$42. y = \frac{\sin \tau}{\sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta + \cos \varphi \cdot \cos \tau}$$

$\varphi$  = nördliche Breite des Standortes. Für Schaffhausen gilt  $\varphi = 47,7^\circ$ .

$\delta$  = Deklination oder Abweichung der Sonne. Im Laufe eines Jahres verändert sich  $\delta$  in den Grenzen  $+23,45^\circ$  und  $-23,45^\circ$ . Wenn das Jahr, ausgehend von der Tag- und Nachtgleiche, in 12 Teile eingeteilt wird, ergibt sich:

Tabelle 1. Schattenspur eines Stabes in einer horizontalen Ebene

Stabhöhe = 1 m,  $x$  in m nördliche Richtung,  $y$  in m westliche Richtung, für die Nachmittagsstunden  $y$  in östlicher Richtung.

|                                   |     | Wirkliche Sonnenzeit |                |                |                |                |                |                |        | Bemerkungen              |
|-----------------------------------|-----|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|--------------------------|
|                                   |     | 0500<br>(1900)       | 0600<br>(1800) | 0700<br>(1700) | 0800<br>(1600) | 0900<br>(1500) | 1000<br>(1400) | 1100<br>(1300) | 1200   |                          |
| 21. Juni                          | $x$ | — 3,297              | — 0,9099       | — 0,2029       | 0,1185         | 0,2901         | 0,3859         | 0,4352         | 0,4505 | längster Tag             |
|                                   | $y$ | 6,588                | 3,117          | 1,952          | 1,317          | 0,8876         | 0,5534         | 0,2667         | 0      |                          |
| 22. Juli<br>und<br>22. Mai        | $x$ | — 4,430              | — 0,9099       | — 0,1285       | 0,1980         | 0,3655         | 0,4572         | 0,5040         | 0,5184 | typischer<br>Sommertag   |
|                                   | $y$ | 9,722                | 3,655          | 2,157          | 1,420          | 0,9434         | 0,5840         | 0,2802         | 0      |                          |
| 22. August<br>und<br>21. April    | $x$ |                      | — 0,9099       | 0,1591         | 0,4706         | 0,6099         | 0,6809         | 0,7159         | 0,7265 |                          |
|                                   | $y$ |                      | 6,529          | 2,951          | 1,768          | 1,124          | 0,6795         | 0,3222         | 0      |                          |
| 23. September<br>und<br>21. März  | $x$ |                      |                | 1,099          | 1,099          | 1,099          | 1,099          | 1,099          | 1,099  | Tag- und<br>Nachtgleiche |
|                                   | $y$ |                      |                | 5,545          | 2,574          | 1,486          | 0,8578         | 0,3982         | 0      |                          |
| 24. Oktober<br>und<br>18. Februar | $x$ |                      |                | 15,72          | 2,778          | 2,052          | 1,815          | 1,718          | 1,691  |                          |
|                                   | $y$ |                      |                | 45,99          | 4,724          | 2,196          | 1,164          | 0,5210         | 0      |                          |
| 23. November<br>und<br>19. Januar | $x$ |                      |                |                | 9,845          | 3,817          | 2,877          | 2,558          | 2,475  | typischer<br>Wintertag   |
|                                   | $y$ |                      |                |                | 13,76          | 3,495          | 1,617          | 0,6875         | 0      |                          |
| 22. Dezember                      | $x$ |                      |                |                | 42,1           | 5,262          | 3,558          | 3,056          | 2,929  | kürzester Tag            |
|                                   | $y$ |                      |                |                | 55,15          | 4,559          | 1,910          | 0,7862         | 0      |                          |

|                             |                         |
|-----------------------------|-------------------------|
| 21. März und 23. September  | $\delta = 0$            |
| 21. April und 22. August    | $\delta = +11,7^\circ$  |
| 22. Mai und 22. Juli        | $\delta = +20,3^\circ$  |
| 21. Juni                    | $\delta = +23,45^\circ$ |
| 18. Februar und 24. Oktober | $\delta = -11,7^\circ$  |
| 19. Januar und 23. November | $\delta = -20,3^\circ$  |
| 22. Dezember                | $\delta = -23,45^\circ$ |

Die Daten gelten für das Jahr 1962. In andern Jahren können sie sich bis höchstens um einen Tag vor- oder zurückverschieben.

$\tau$  = Stundenwinkel. Für wirkliche Sonnenzeit 12.00 h ist  $\tau = 0^\circ$  (siehe Tabelle 2).

Mit den Formeln 41 und 42 und den Angaben unter  $\varphi$ ,  $\delta$  und  $\tau$  können  $x$  und  $y$  für jeden Standort, jede Jahreszeit, jedes Jahr und jede Zeit berechnet werden.

## 5. Die Schattenspur als Kegelschnitt

Beim Aufzeichnen der Schattenspur mit den  $x$ - und  $y$ -Werten aus Tabelle 1 zeigt es sich, dass die Schattenspur den Verlauf von Hyperbeln haben. Tatsächlich können die Schattenspur als Kegelschnitte aufgezeichnet und berechnet werden. Der Weg ist aber mühsamer als die trigonometrische Lösung nach Absatz 3 und 4. Dagegen können wir die mit Tabelle 1 aufgezeichneten Schattenspur auf einfache Weise prüfen und ergänzen.

**51. Symmetrie.** Die Schattenspur für  $\delta$  und  $-\delta$  haben die gleiche Form und liegen zum Punkte  $M$  symmetrisch. Beispiel: Die Schattenspur für  $\delta = 20,3^\circ$  (22. Mai, 22. Juli) hat gleiche Form wie die Schattenspur für  $\delta = -20,3^\circ$  (19. Januar, 23. November). Die beiden Schattenspur liegen zum Punkt  $M$  symmetrisch (die Lage dieses Punktes wird später noch angegeben).

**52. Asymptoten.** Die Asymptote ist diejenige Gerade, der sich die Schattenspur (Hyperbel) mit steigenden  $x$ - und  $y$ -Werten immer mehr nähert, sie aber nie berührt oder schneidet. Die Asymptote schneidet die  $x$ -Axe im Punkt  $M$  und hat zur  $x$ -Axe den Winkel  $\beta$ . Die Richtung der Asymptote entspricht der Richtung des Sonnenstrahls bei Sonnenaufgang bzw. bei Sonnenuntergang.

**53. Brennpunkte.** Die Hyperbeln (bzw. Schattenspur) haben zwei Brennpunkte  $B_1$  und  $B_2$ . Wenn wir einen beliebigen Punkt der Hyperbel mit  $P$  bezeichnen, so gilt die Beziehung: Strecke  $B_1 - P$  minus Strecke  $B_2 - P$  ist gleich  $2a$ . Beliebige Punkte der Hyperbel lassen sich so auf einfache Weise konstruieren.

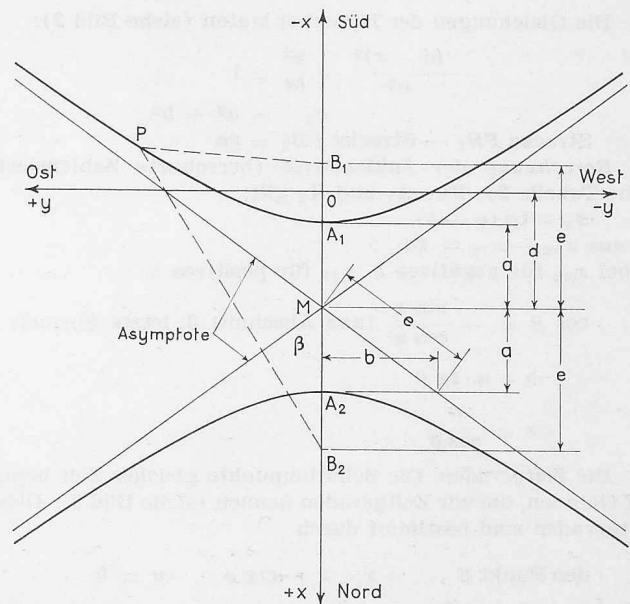


Bild 2. Die Schattenspur als Kegelschnitt (Hyperbel)

$$\frac{(d-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Werte für  $\beta$ ,  $2a$  sowie die Lage der Punkte  $M$ ,  $B_1$  und  $B_2$  sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

## 6. Berechnung der Hyperbeln

Die Schattenspur sind Kegelschnitte in der besonderen Form von Hyperbeln. Die Axe des Kegels ist gegen die Schnittebene um den Winkel  $\varphi$  geneigt. Der Öffnungswinkel des Kegels beträgt  $180^\circ - 2\delta$ . Die Kegelspitze hat einen Abstand von 1 m von der Schnittebene. Die Kegelaxe durchstösst die Schnittebene. Der dem Durchstosspunkt näher liegende Hyperbelast entspricht positiven  $\delta$  (Sommer), der vom Durchstosspunkt weiter entfernte Hyperbelast entspricht negativen  $\delta$  (Winter). Die beiden Hyperbeläste für  $+\delta$  und  $-\delta$  (z. B.  $\delta = +20,3^\circ$  22. Mai, 22. Juli und  $\delta = -20,3^\circ$  19. Januar, 23. November) haben gleiche Form. Die während einer Stunde auf der Spur zurückgelegte Strecke ist aber im Winter grösser als im Sommer.

Tabelle 2. Stundenwinkel  $\tau$

| Wirkliche Sonnenzeit | $\tau$ |
|----------------------|--------|
| 05.00                | 105°   |
| 06.00                | 90°    |
| 07.00                | 75°    |
| 08.00                | 60°    |
| 09.00                | 45°    |
| 10.00                | 30°    |
| 11.00                | 15°    |
| 12.00                | 0°     |
| 13.00                | — 15°  |
| 14.00                | — 45°  |
| 15.00                | — 30°  |
| 16.00                | — 60°  |
| 17.00                | — 75°  |
| 18.00                | — 90°  |
| 19.00                | — 105° |

Tabelle 3. Schattenspur als Hyperbeln (Kegelschnitte)

Neigungswinkel des Kegels gegen die Schnittebene =  $\varphi = 47,7^\circ$  (nach N geneigt)  
 Öffnungswinkel des Kegels =  $180^\circ - 2\delta$   
 Abstand der Kegelspitze von der Schnittebene = 1 m

| $\delta =$      |                  | 0°            | $\pm 11,7^\circ$ | $\pm 20,3^\circ$ | $\pm 23,45^\circ$ |
|-----------------|------------------|---------------|------------------|------------------|-------------------|
| Datum:          | $\delta$ positiv | 21. 3./23. 9. | 21. 4./22. 8.    | 22. 5./22. 7.    | 21. 6.            |
|                 | $\delta$ negativ |               | 18. 2./24. 10    | 19. 1./23. 11.   | 22. 12.           |
| $2a$            |                  | —             | 0,9644           | 1,9567           | 2,4766            |
| $b$             |                  | —             | 1,5259           | 1,6263           | 1,6902            |
| $e$             |                  | —             | 1,6003           | 1,8979           | 2,0959            |
| $d$             |                  | 1,0990        | 1,2087           | 1,4967           | 1,6898            |
| $\beta$         |                  | 90°           | 72,463°          | 58,969°          | 53,750°           |
| Sonnenaufgang   | $\delta$ positiv | 0600 h        | 0507 h           | 0424 h           | 0406 h            |
|                 | $\delta$ negativ |               | 0653 h           | 0736 h           | 0754 h            |
| Sonnenuntergang | $\delta$ positiv | 1800 h        | 1853 h           | 1936 h           | 1954 h            |
|                 | $\delta$ negativ |               | 1707 h           | 1624 h           | 1606 h            |
| $x$ -Werte für: | $B_1$            | —             | — 0,3916         | — 0,4012         | — 0,4061          |
|                 | $A_1$            | 1,0990        | 0,72653          | 0,51835          | 0,45047           |
|                 | $M$              | 1,0990        | 1 2087           | 1,4967           | 1,6898            |
|                 | $A_2$            | 1,0990        | 1,6909           | 2,4751           | 2,9291            |
|                 | $B_2$            | —             | 2,8090           | 3,3946           | 3,7857            |

Alle Masse in m. Erläuterungen siehe Bild 2

Die Gleichungen der Hyperbel lauten (siehe Bild 2):

$$\frac{(d-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$e_2 = a^2 + b^2$$

Strecke  $PB_1$  — Strecke  $PB_2 = 2a$

**Berechnung der Zahlenwerte** (berechnete Zahlenwerte siehe Tabelle 2): Für  $A_1$  und  $A_2$  gilt:

$$x_{A_1} = \operatorname{tg}(\varphi - \delta)$$

daraus  $x_{A_2} - x_{A_1} = 2a$

wobei  $x_{A_2}$  für negatives  $\delta$ ,  $x_{A_1}$  für positives  $\delta$

$$\cos \beta = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \quad (\text{aus Abschnitt 3, letzte Formel})$$

$$b = a \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$e = \frac{a}{\cos \beta}$$

**Die Zeitgeraden.** Die Schattenpunkte gleicher Zeit liegen auf Geraden, die wir Zeitgeraden nennen (siehe Bild 3). Diese Zeitgeraden sind bestimmt durch

$$\text{den Punkt } S \quad : \quad x = -\operatorname{ctg} \varphi \quad y = 0$$

$$\text{den Punkt } x_M, y_M: x_M = \operatorname{tg} \varphi \quad y_M = \frac{\operatorname{tg} \tau}{\cos \varphi}$$

In der allg. Formel für eine Gerade  $p \cdot x + q \cdot y + r = 0$  die obigen Werte eingesetzt, ergibt

$$y = \operatorname{tg} \tau (\cos \varphi + x \cdot \sin \varphi)$$

**Berechnung der Schattenpunkte.** Wenn in den beiden Gleichungen

$$y = \operatorname{tg} \tau (\cos \varphi + x \cdot \sin \varphi)$$

und

$$\frac{(d-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Zahlenwerte, z.B. nach Tabelle 3, eingesetzt werden, lassen sich  $x$  und  $y$  berechnen. Da sich eine quadratische Gleichung ergibt, ist aber die Lösung, wie schon weiter oben festgestellt wurde, wesentlich mühsamer als der im Abschnitt 4 dargelegte Weg.

Zu beachten: Der Winkel  $\beta$  entspricht dem Azimut  $a$  für Sonnenaufgang und Sonnenuntergang. Das Azimut  $a$  in Abschnitt 3 und 7 ist *nicht* identisch mit der Hyperbelkonstanten  $a$  in Abschnitt 5 und 6 von Bild 2 und Tabelle 3.

## 7. Sonnenaufgang und Sonnenuntergang

Für die besonderen Verhältnisse des Sonnenaufganges und des Sonnenunterganges gilt  $h =$  Höhe des wirklichen Horizontes,  $\delta =$  Deklination (für den betr. Tag aus dem «Nautischen Jahrbuch» entnehmen oder aus «Schülke» Tafel 25 berechnen),  $\varphi =$  geographische Breite.

Das *Azimut*  $a$  (Richtung des Sonnenaufganges) berechnet sich

$$\cos a = \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} h - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi \cdot \cos h}$$

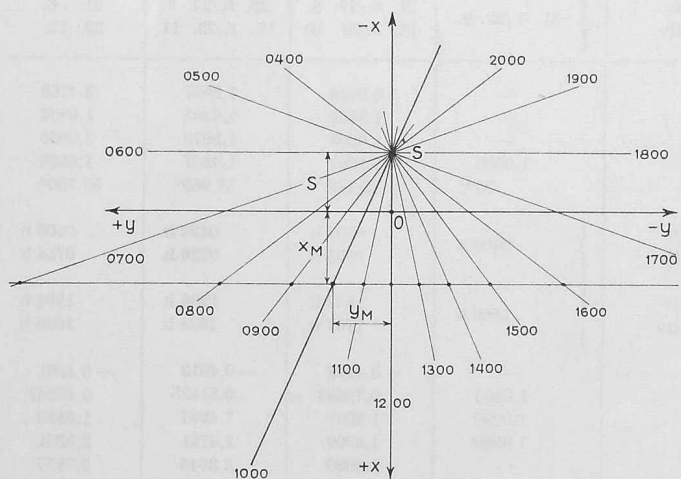


Bild 3. Die Zeitgeraden  $y = \operatorname{tg} \tau (\cos \varphi + x \cdot \sin \varphi)$

Der *Stundenwinkel* (Zeit des Sonnenaufganges) berechnet sich

$$\cos \tau = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta + \frac{\sin h}{\cos \varphi \cdot \cos \delta}$$

In der Nähe des Horizontes macht sich die *Strahlenbrechung* bemerkbar. Der Beobachter sieht die Sonne um die Strahlenbrechung höher, als dem tatsächlichen Sonnenstande entspricht.

| $h$<br>Höhe über dem ebenen<br>Horizont in ° | Strahlenbrechung<br>in ° |
|----------------------------------------------|--------------------------|
| 0°                                           | 0,58°                    |
| 2°                                           | 0,30°                    |
| 4°                                           | 0,19°                    |
| 6°                                           | 0,14°                    |
| 8°                                           | 0,11°                    |
| 10°                                          | 0,09°                    |
| 20°                                          | 0,04°                    |
| 40°                                          | 0,02°                    |
| 60°                                          | 0,01°                    |

Am Horizont ist auch der *Halbmesser der Sonne* von Bedeutung. Er ändert mit dem Abstand der Erde von der Sonne, der sich aus der elliptischen Bahn um die Sonne ergibt.  $R$  beträgt am 1. Januar 0,271°, am 1. April 0,276°, am 1. Juli 0,262° und am 1. Oktober 0,267°.

Als Sonnenaufgang gilt das Auftauchen des oberen Sonnenrandes über dem Horizont. Damit findet, zusammen mit den Auswirkungen der Strahlenbrechung, der Sonnenaufgang um  $\Delta \tau$  früher statt als sich aus den rein trigonometrischen Berechnungen ergibt.

$$\Delta \tau \quad (\text{in } ^\circ) = \frac{\gamma}{\cos \varphi \cdot \sin \tau}$$

$$\Delta \tau \quad (\text{in min}) = \frac{4 \gamma}{\cos \varphi \cdot \sin \tau}$$

wobei

$\gamma =$  Strahlenbrechung in ° + Radius der Sonne  $R$  in °

Für einen *ebenen Horizont* ( $h = 0^\circ$ ) ergibt sich:

$$\gamma = 0,58^\circ + 0,27^\circ = 0,85^\circ$$

$$23. \text{ März und } 23. \text{ September} \quad \Delta \tau = 5,05 \text{ min}$$

$$21. \text{ Juni und } 2. \text{ Dezember} \quad \Delta \tau = 5,83 \text{ min}$$

Der Sonnenaufgang findet um  $\Delta \tau$  früher, der Sonnenuntergang um  $\Delta \tau$  später statt, als er sich aus den rein trigonometrischen Berechnungen ergibt. Auch die Zeiten für den Sonnenaufgang und den Sonnenuntergang in Tabelle 3 müssen mit  $\Delta \tau$  korrigiert werden.

## 8. Zeitkorrektur für Uhrzeit

In den vorangehenden Abschnitten haben wir ausschliesslich die «wirkliche Sonnenzeit» verwendet. Die

Tabelle 4. Zeitgleichung und Zeitkorrektur

| Tag           | Zeitgleichung<br>in min | Zeitkorrektur<br>in min |
|---------------|-------------------------|-------------------------|
| 19. Januar    | +10,7                   | +36,2                   |
| 18. Februar   | +14,0                   | +39,5                   |
| 21. März      | + 7,4                   | +32,9                   |
| 21. April     | — 1,2                   | +24,3                   |
| 22. Mai       | — 3,5                   | +22,0                   |
| 21. Juni      | + 1,5                   | +27,0                   |
| 22. Juli      | + 6,3                   | +31,8                   |
| 22. August    | + 2,9                   | +28,4                   |
| 23. September | — 7,5                   | +18,0                   |
| 24. Oktober   | —15,7                   | + 9,8                   |
| 23. November  | —13,7                   | +11,8                   |
| 22. Dezember  | — 1,6                   | +23,9                   |

«wirkliche Sonnenzeit» stimmt mit dem Stand der Sonne überein, d. h. um 12.00 hat die Sonne ihren höchsten Stand, und die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und 12.00 h ist genau gleich lang wie die Zeitspanne zwischen 12.00 h und Sonnenuntergang. Unsere Uhrzeit ist die «Mitteleuropäische Zeit» (MEZ). Sie weicht von der «wirklichen Sonnenzeit» in zweifacher Hinsicht ab:

1. *Längenkorrektur.* Die MEZ entspricht der «mittleren Sonnenzeit» des 15. östlichen Längengrades. Die östliche Länge des Standortes (Schaffhausen) beträgt  $8,63^\circ$ . Korrektur:  $15^\circ - 8,63^\circ = 6,37^\circ$  zu 4 min = 25,5 min. Für den Standort Schaffhausen gilt: «Mittlere Sonnenzeit» + 25,5 min = MEZ.

2. *Zeitgleichung.* Die ungleichförmige Bewegung der Erde auf ihrer elliptischen Bahn um die Sonne und die Schiefe der Erdaxe verursachen einen Unterschied zwischen einer angenommenen «mittleren Sonnenzeit» von der «wirklichen Sonnenzeit». Dieser Unterschied wird mit Zeitgleichung bezeichnet. Die Zeitgleichung ist positiv, wenn die «wirkliche Sonnenzeit» der «mittleren Sonnenzeit» nachsteht.

Die ganze Zeitkorrektur setzt sich aus der Summe der Längenkorrektur und der Zeitgleichung zusammen (Tab. 4).

Beispiel für die Zeitkorrektur:

23. November 1962: 13.00 wirkliche Sonnenzeit =  
13 h 11 min 48 s MEZ (Uhrzeit)

Die in der Tabelle enthaltenen Werte für die Zeitgleichung und damit für die Zeitkorrektur gelten für das Jahr 1962. Sie verändern sich von Jahr zu Jahr um einige Zehntel Minuten.

Die genauen Werte für die Zeitgleichung sowie die in den vorangegangenen Abschnitten erwähnte Deklination oder Abweichung  $\delta$  können aus dem «Nautischen Jahrbuch» entnommen werden. Dieses Jahrbuch erscheint jedes Jahr im Verlag des Deutschen Hydrographischen Institutes in Hamburg.

Zeitgleichung und Deklination  $\delta$  lassen sich auch für jeden beliebigen Tag in jedem beliebigen Jahr berechnen auf Grund von Tafel 25 in «Schülkes Tafeln», Verlag G. B. Teubner, Stuttgart 1960.

Ein graphisches Verfahren für die Schattenkonstruktion ist unter dem Titel «Diagrammes Solaires» beim Centre Scientifique et Technique du Bâtiment 1962 in Paris erschienen.

Adresse des Verfassers: Paul Maier, dipl. El.-Ing., Kometsträsschen 19, Schaffhausen.

DK 620.171.5:627.43

## Photoelastische Untersuchungen an den Wehrpfeilern des Kraftwerkes Schaffhausen

Von Dr. M. Martinola, EMPA, Zürich

Schluss von Seite 764

### Anhang

#### 1. Grundlagen der ebenen Photoelastizität

Wir betrachten eine Scheibe von konstanter Dicke  $e$  aus einem durchsichtigen, homogenen und isotropen Stoffe (z. B. Plexiglas), die durch in der Mittelebene liegende Randkräfte  $K_1, K_2, \dots, K_i, \dots, K_n$  belastet ist, Bild 34. Die Kräfte  $K_i$  sind im Gleichgewicht und erzeugen in der Scheibe einen ebenen Spannungszustand, der durch die drei Grössen charakterisiert ist, nämlich durch die Richtung der Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , d. h. den Winkel  $\alpha$ , und durch die Grösse von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Der Zweck der ebenen photoelastischen Untersuchung ist die Bestimmung dieser drei Grössen mit Hilfe von polarisiertem Licht.

Ein monochromatischer Lichtstrahl  $L$ , der durch ein erstes Filter  $P$  (Polarisator) linear polarisiert (z. B. vertikal) wird, durchdringt das belastete Modell in  $O$  senkrecht zur Scheibenoberfläche. Die Isotropie der Materie ist durch die Belastung zerstört. Nach den photoelastischen Gesetzen wird der polarisierte Lichtstrahl in zwei Komponenten nach den beiden Hauptrichtungen 1 und 2 zerlegt; diese durchlaufen die Scheibe mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten und weisen nach der Scheibe eine relative «Phasenverschiebung»  $\delta_3$  auf Bild 34. Es gilt das Gesetz von Wertheim.

$$(5) \quad \delta_3 = c e (\sigma_1 - \sigma_2),$$

worin  $e$  die Dicke der Scheibe und  $c$  eine optische Konstante bedeuten, welche vom Scheibenstoff sowie von der Wellenlänge des verwendeten Lichtes abhängt.

Der Lichtstrahl durchdringt weiter ein zweites Filter  $A$  (Analysator), das gekreuzt zum Polarisator steht, d. h. nur die horizontale Komponente des Lichtes durchlässt. Die Lichtintensität  $J$  nach dem Analysator ist durch die Formel:

$$(6) \quad J = \text{Konst.} \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta_3 \pi}{\lambda}$$

gegeben, d. h. von der Richtung und der Differenz der Hauptspannungen abhängig. Nehmen wir an, die Scheibe sei flächenweise beleuchtet und stufenweise belastet. Wenn die äussere Belastung einen bestimmten Wert erreicht hat, wird das Auge hinter dem Analysator dunkle Linien beobachten. Sie sind durch die eine der zwei Bedingungen, die  $J$  annullieren, bestimmt, d. h.:

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \dots \text{ oder } \delta_3 = n\lambda, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Der Ort der Punkte, für welche  $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \dots$  ist, sind Li-

nien, die *Isoklinen* heissen. Sie verbinden alle Punkte in der Scheibe, deren Hauptrichtung 1 (Bild 34) mit der des Polarisators übereinstimmt. Der Ort der Punkte, für welche  $\delta_3 = n\lambda$ , sind die *Isochromaten*. Sie verbinden Punkte gleicher Hauptspannungsdifferenz  $\sigma_1 - \sigma_2$  oder gleicher Hauptschubspannung  $\tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$ .

Mit Hilfe der Isoklinen und der Isochromaten erhält man zwei von den drei gesuchten Grössen. Um den Spannungszustand in jedem Punkt im Innern der Scheibe vollständig zu bestimmen, brauchen wir mindestens noch eine dritte Information<sup>19)</sup>; diese lässt sich mit Hilfe von graphischen oder experimentellen Methoden ermitteln. Die meist gebrauchte

<sup>19)</sup> Nur längs des freien Scheibenrandes, z. B. wegen  $\sigma_2 = 0$ , ist der Spannungszustand durch die Messung von  $\sigma_1 - \sigma_2$  und  $\alpha$  vollständig bestimmt.

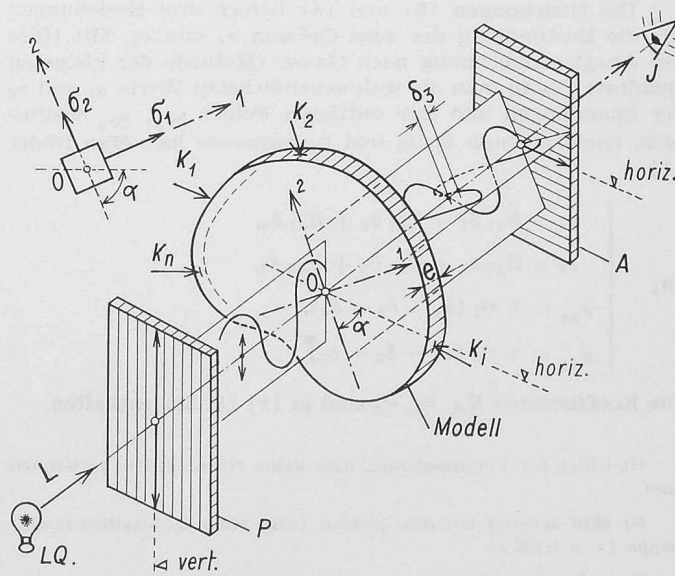


Bild 34. Schematische Darstellung der photoelastischen Vorgänge