# 2. Courbes de genre 1

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

En géométrie, i.e. dans l'étude des variétés définies sur le corps des nombres complexes, les variétés de Severi-Brauer jouent un grand rôle comme fibre générique de morphismes $X \to Y$, dans l'étude des variétés qui sont « proches d'être rationnelles »: variétés unirationnelles de divers types. Ainsi, le fameux contre-exemple d'Artin/Mumford (1972) au problème de Lüroth en dimension 3 (une variété qui est dominée par une variété rationnelle n'est pas nécessairement rationnelle) est-il fourni par une telle variété $X$ fibrée au-dessus d'une surface rationnelle $Y$, la fibre générique étant une conique sans point rationnel. D'autres variétés de Severi-Brauer apparaissent dans l'étude des corps d'invariants d'actions linéaires presque libres de groupes linéaires connexes.

Mais là où les variétés de Severi-Brauer ont sans conteste joué le rôle le plus important, c'est dans la démonstration des théorèmes de Merkur'ev et Suslin (1982) sur le groupe $K_2$ des corps, ceci via le calcul de Quillen (1973) de la $K$-théorie des schémas de Severi-Brauer. Ces théorèmes ont eu des applications tant aux algèbres simples centrales sur un corps arbitraire qu'à l'étude des groupes de Chow des variétés algébriques (classes de cycles pour l'équivalence rationnelle).

## 2. Courbes de genre 1

### 2.1. Avant Châtelet.

En 1901, Poincaré montre qu'une courbe $C$ de genre 1 définie sur un corps $k$ et qui possède un point $k$-rationnel est isomorphe sur son corps de définition à une courbe elliptique $E$ de Weierstrass:

$$(E) \qquad y^2 = x^3 + ax + b\,,$$

laquelle admet naturellement une loi de groupe avec élément neutre le point à l'infini. Cette loi de groupe en induit une sur l'ensemble $E(k)$ des points rationnels. Poincaré formule l'hypothèse que pour $k$ le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, le groupe $E(\mathbf{Q})$ est engendré par un nombre fini d'éléments. Ceci fut démontré par Mordell en 1922 et généralisé par Weil en 1928 au cas où $k$ est un corps de nombres, et où $E$ est la jacobienne d'une courbe de genre quelconque. Weil donna aussi une méthode « élémentaire », qui passe par des « factorisations ». On montre ainsi que pour $E$ donnée par

$$y^2 = (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$$

on dispose d'une injection

$$E(k)/2E(k) \to (k^*/k^{*2})^2$$
$$(x, y) \mapsto (x-e_1, x-e_2),$$

qui est d'image finie si $k$ est un corps de nombres (théorème de Mordell-Weil faible). Nous verrons au paragraphe 3 comment ceci inspira Châtelet dans un autre contexte.

## 2.2. La contribution de Châtelet [1938] [1941] [1946a] [1947a].

La motivation initiale de Châtelet était de déterminer quand une courbe $C$ de genre 1 définie sur un corps $k$ a un point rationnel. Il s'agissait là d'un projet bien ambitieux: à ce jour on ne possède, dans le cas $k = \mathbf{Q}$, d'aucun algorithme sûr pour ce faire. Voici les résultats que Châtelet obtint (le corps $k$ est simplement supposé parfait).

1) *Pour $C$ de genre 1 définie sur $k$, il existe une courbe elliptique $E$ définie sur $k$ (i.e. $E$ de genre 1, et $E(k) \neq \emptyset$) et un isomorphisme, défini sur $\bar{k}$,*

$$f : \bar{E} \simeq \bar{C}.$$

2) *A un tel isomorphisme on associe un 1-cocycle*

$$a_\sigma = {}^\sigma f \circ f^{-1} \in Z^1(G, \mathrm{Aut}(\bar{E})), \quad \text{où} \quad G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k).$$

3) *On dispose d'une suite exacte de $G$-groupes:*

$$1 \to E(\bar{k}) \to \mathrm{Aut}(\bar{E}) \to F \to 1,$$

*où $F$ est un groupe fini, en général égal à $\{\pm 1\}$. Quitte à changer de courbe de référence $E$ en 1), on peut assurer que $a_\sigma$ vient de $Z^1(G, E(\bar{k}))$. Cette condition détermine la courbe elliptique $E$ (qui n'est autre alors que la jacobienne de $E$).*

4) *Deux courbes $C$ et $D$ de genre 1 définies sur $k$ sont isomorphes sur $k$ si et seulement si d'une part elles ont même jacobienne $E$, d'autre part il existe $b \in E(\bar{k})$ tel que $a_\sigma(C) - a_\sigma(D) = {}^\sigma b - b$ pour tout $\sigma \in G$.*

5) *$C(k)$ est non vide si et seulement si il existe $b \in E(\bar{k})$ tel que $a_\sigma = {}^\sigma b - b$ pour tout $\sigma \in G$.*

En termes modernes, 3) dit que $C$ est un espace principal homogène sous la courbe elliptique $E$, et 4) dit que l'ensemble des classes d'isomorphisme

d'espaces principaux homogènes sous $E$ se plonge dans le groupe (abélien) de cohomologie $H^1(G, E(\bar{k}))$.

Ce fut Weil qui, en 1955, montra que ce plongement est en fait une bijection, si bien que les classes d'isomorphisme d'espaces principaux homogènes sous $E$ forment un groupe abélien. C'est ce groupe qui fut nommé en 1957 groupe de Weil-Châtelet WC($E$) par Tate, lequel considéra plus généralement le groupe $H^1(G, A(\bar{k}))$ pour $A$ une variété abélienne définie sur $k$.

Les résultats de Châtelet lui permirent de retrouver des résultats antérieurs de façon entièrement algébrique:

Il établit d'une part ([1939], [1947*c*]) le théorème de F. K. Schmidt (1931) selon lequel toute courbe de genre 1 sur un corps fini $F$ possède un point rationnel en montrant que les groupes $H^1(\mathrm{Gal}(F_r/F), E(F_r))$ et $E(F)/NE(F_r)$, où $N$ est la norme correspondant à l'extension de corps finis $F_r/F$, ont même cardinal et que le dernier groupe est nul, en utilisant le théorème de Riemann-Roch.

Il retrouva d'autre part ([1949*a*]) les résultats de Klein, Weichold, Witt (1934) sur la classification des courbes de genre 1 sur le corps $\mathbf{R}$: si $C$ et $D$ sont deux courbes de genre 1 sur $\mathbf{R}$ de jacobienne $E$, elles sont isomorphes à $E$ si $E(\mathbf{R})$ est connexe; si $E(\mathbf{R})$ est disconnexe et ni $C$ ni $D$ n'ont de point réel, elles sont isomorphes entre elles. Le point ici est l'isomorphisme $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}), E(\mathbf{C})) \simeq E(\mathbf{R})/N_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(E(\mathbf{C})) = 0$ ou $\mathbf{Z}/2$.

Enfin, F. Châtelet a fait quelques pas dans la direction de la suite exacte de cohomologie (dégagée par Lang et Tate en 1958)

$$0 \to E(k)/nE(k) \to H^1(G, {}_nE(\bar{k})) \to {}_nH^1(G, E(\bar{k})) \to 0$$

déduite de la suite de $G$-modules

$$0 \to {}_nE(\bar{k}) \to E(\bar{k}) \xrightarrow{n} E(\bar{k}) \to 0\,.$$

Dans des cas particuliers [1941], il a vu la structure de groupe sur le terme médian $H^1(G, {}_nE(\bar{k}))$, d'où une composition des « $n$-revêtements ». Mais il semble bien que ce soit Weil qui ait établi la structure de groupe de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'espaces principaux homogènes sous $E$.

Il est intéressant de noter que dans ses articles, Châtelet insiste sur le fait que son analyse permet de ramener la question de l'existence d'un point rationnel sur $C$ à la connaissance du groupe de Mordell-Weil $E(k)$ de la courbe jacobienne $E$ associée. Si les deux problèmes sont en fait essentiellement équivalents, l'approche cohomologique que F. Châtelet a contribué à introduire a servi de fondement à tous les développements ultérieurs.

## 2.3. Après Châtelet.

On a vu plus haut les développements directs que constituèrent les articles de Weil (1955) et de Lang-Tate (1958). En 1956, Lang établit que pour un groupe algébrique connexe quelconque $A$ défini sur un corps fini $F$, l'ensemble de cohomologie $H^1(G, A(\bar{F}))$ est trivial: tout espace principal homogène sous $A$ est isomorphe à $A$, ce qui généralise l'approche de Châtelet du théorème de F. K. Schmidt. En 1957, un exposé fameux de Tate au séminaire Bourbaki, intitulé « $WC$-groups over $\mathfrak{p}$-adic fields », établit, pour $k$ un corps $\mathfrak{p}$-adique et $A$ une variété abélienne définie sur $k$, des théorèmes de dualité entre $A(k)$ et $H^1(G, A(\bar{k}))$ qui sont les analogues des théorèmes de Witt (1934) dans le cas réel.

La théorie des courbes de genre 1 a depuis connu de tels développements qu'il serait impossible de les évoquer ici. Mentionnons cependant les travaux de Selmer (1951-1956) et Cassels (1959-1966), et l'introduction du groupe de Tate-Shafarevitch

$$Ш^1(k, E) = \mathrm{Ker}\,[WC(E) \to \Pi_v WC(E_v)]\,,$$

où $v$ parcourt les places du corps de nombres $k$ et où $E_v$ est la courbe $E$ considérée sur le complété $k_v$ de $k$. Ce groupe mesure le défaut du principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous $E$. Sa finitude est conjecturée et vient seulement d'être établie pour certaines courbes (Rubin, 1986).

## 2.4. Points de torsion.

Châtelet a aussi consacré plusieurs articles ([1940*a*], [1940*b*], [1947*b*], [1950*a*]) aux « points exceptionnels » des cubiques planes. La tangente en un point rationnel $P$ d'une cubique plane $E$ recoupe $E$ en un troisième point rationnel, on prend la tangente en ce nouveau point et l'on recommence: le point $P$ est dit exceptionnel si après un nombre fini d'itérations on retrouve le point $P$. Dans le cas d'une cubique de Weierstrass, ceci revient à dire que le point $P$ est un point de torsion du groupe $E(k)$. Lorsque $k$ est un corps de nombres, ce groupe est fini. Pour $k = \mathbf{Q}$ et $E$ sous forme de Weierstrass

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

avec $a$ et $b$ dans $\mathbf{Z}$, Nagell établit en 1935 que si $(x, y) \in E(\mathbf{Q})$ est un point exceptionnel, alors $x$ et $y$ sont dans $\mathbf{Z}$ et $y$ est nul ou divise $4a^3 + 27b^2$, ce qui permet une détermination *effective* des points de torsion. Une méthode

générale fut développée par E. Lutz (1937) et A. Weil (1936), qui étudièrent la structure du groupe topologique $E(k)$ lorsque $k$ est un corps p-adique (ce qu'on peut transcrire aujourd'hui au moyen des groupes formels et des modèles de Néron). Châtelet attira l'attention sur le fait que la méthode d'E. Lutz permet la détermination effective des points exceptionnels lorsque le corps de base $k$ est un corps de nombres quelconque. Dans une note de 1940, Châtelet observe que les résultats de Lutz permettent de borner uniformément la torsion des courbes elliptiques définies sur un corps de nombres $k$ et d'invariant $j$ fixé (il suffit de se placer sur une complétion $p$-adique de $k$; à $k$-isomorphisme près, il n'y a alors qu'un nombre fini de courbes elliptiques d'invariant $j$ donné, et pour chacune d'elles le groupe de torsion est fini). C'est un problème ouvert de savoir si la condition sur $j$ peut être omise (dans le cas $k = \mathbf{Q}$, c'est un théorème de Mazur que l'ordre du groupe de torsion est au plus 16).

## 3. Surfaces cubiques

C'est la partie de l'œuvre de Châtelet qui a joué un grand rôle dans mes recherches personnelles.

Sauf mention du contraire, les surfaces cubiques ici considérées sont supposées absolument irréductibles et non coniques. Le corps de base $k$ est pris de caractéristique zéro.

### 3.1. Avant Châtelet.

De 1940 à 1944, Mordell et B. Segre s'intéressent aux surfaces cubiques. Ils montrent que si une telle surface $X$ définie sur $k$ possède un point rationnel non singulier, alors il existe une application rationnelle dominante définie sur $k$ d'un plan projectif sur $X$. En particulier les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski. B. Segre montre en 1944 qu'une surface cubique singulière $X$ qui possède un point rationnel non singulier est $k$-rationnelle ($k$-birationnelle au plan projectif) sauf si $X$ possède exactement deux points singuliers conjugués. En 1951, ce même Segre étudie les surfaces cubiques non singulières. On dit qu'une telle surface contient un $S_n$ si elle contient un ensemble globalement défini sur $k$ de $n$ droites gauches deux à deux. Segre montre que si $X$ est $k$-rationnelle, alors $X$ contient nécessairement un $S_1$, un $S_2$, un $S_3$ ou un $S_6$ (comme le montrèrent indépendamment en 1970 Swinnerton-Dyer et Iskovskih, $X$ contient en fait un $S_2$, un $S_3$ ou un $S_6$). En 1951, Segre donne aussi les premiers exemples