

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **16 (1961)**

Heft 6

PDF erstellt am: **26.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. H. MILLS, *A prime-representing function*. Bull. Amer. math. Soc. 53, 604 (1947).  
 [2] L. KUIPERS, *Prime-representing functions*. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 53, 309–310 (1950); Indag. math., Amsterdam 12, 57–58 (1950).  
 [3] I. NIVEN, *Functions which represent prime numbers*. Proc. Amer. math. Soc. 2, 753–755 (1951).  
 [4] A. R. ANSARI, *On prime representing functions*. Ganita 2, 81–82 (1951).  
 [5] E. M. WRIGHT, *A prime-representing function*. Amer. math. Monthly 58, 616–618 (1951).  
 [6] W. SIERPIŃSKI, *Sur une formule donnant tous les nombres premiers*. Comptes Rendus 235, 1078–1079 (1952).  
 [7] TH. BANG, *A function representing all prime numbers*. Norsk. Mat. Tidsskr. 34, 117–118 (1952).

## Kleine Mitteilungen

## Gegensätzliches Verhalten der arithmetischen und geometrischen Mittel

## 1. Vorbemerkungen

Das arithmetische Mittel  $A$  von  $n$  positiven Grössen ist nie kleiner als das geometrische Mittel  $G$ . Fast ebenso bekannt dürfte die Tatsache sein, dass aus  $y_i, z_i > 0$  und der Gültigkeit von  $A(y_i) \geq A(z_i)$  arithmetisch nicht etwa die Relation  $G(y_i) \geq G(z_i)$  folgt. Die arithmetischen und geometrischen Mittel brauchen sich nicht gleichartig zu verhalten. Zahlenbeispiele für gegensätzliches Verhalten können leicht gefunden werden, doch mögen die folgenden *geometrischen* Beispiele aus der elementaren Dreiecksgeometrie vielleicht von Interesse sein. Bieten sie gar dem einen oder andern Kollegen Anregung zu kleinen Abweichungen vom üblichen Stoffprogramm an der Mittelschule, so erfüllt diese Note ihren Zweck völlig.

Im folgenden ist  $H$  das harmonische Mittel,  $\sum_1^3 x_i = \Sigma x_i$  und  $\prod_1^3 x_i = \Pi x_i$ . Der Seite  $a_i$  im Bezugsdreieck  $\Delta$  liege der Winkel  $\alpha_i$  mit dem Scheitel  $A_i$  gegenüber.  $A_i$  sei der eine Endpunkt der Winkelhalbierenden  $w_i$  und der Seitenhalbierenden  $m_i$ .  $R$ ,  $r$  und  $s$  seien Um-, Inkreisradius und halber Umfang von  $\Delta$ ,  $r_i$  der Radius des  $a_i$  berührenden Ankreises.

Wir zeigen vor allem, dass

$$\begin{array}{l} A(m_i) \leq A(r_i) \\ G(m_i) \geq G(r_i) \end{array} \quad (\text{I})$$

und

$$\begin{array}{l} \sqrt{3} A(a_i) \leq 2 A(r_i) \\ \sqrt{3} G(a_i) \geq 2 G(r_i) \end{array} \quad (\text{II})$$

mit Gleichheit nur im gleichseitigen Dreieck gilt. Überhaupt realisiert in den jeweiligen Beweisgängen bei « $\leq$ » und « $\geq$ » nur die reguläre Figur das Gleichheitszeichen, wenn beide Seiten drei Grössen aufweisen. Überdies folgen alle Ungleichungen jeweils aus JENSENS Überlegungen für die Funktionen einer Variablen<sup>1)</sup>, falls nicht eine besondere Begründung angeführt wird. Die verwendeten *Gleichungen* sind leicht herzuleiten und grösstenteils, vielleicht sogar ausnahmslos, bekannt. Auf Herleitungen glauben wir deshalb hier verzichten zu dürfen.

## 2. Seitenhalbierende und Ankreisradien

Besonders reizvoll wird der Beweis der ersten Ungleichung von (I) auch für den Schüler, wenn wir die Anschauung zu Hilfe nehmen. Die Anregung dazu verdankt der Verfasser der Rubrik «Aufgaben für die Schule» dieser Zeitschrift<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> JENSEN, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*. Acta Mathematica 30, 175–193, 1906.

<sup>2)</sup> El. Math. XIII, 2, Aufgabe 3 mit Figur 2, 45–46, 1958.

Es ist  $\overline{PM} = \overline{MQ}$  und damit  $\overline{MN} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ . Im spitz- und stumpfwinkligen  $\Delta$  gilt  $w_3 \leq \overline{MN} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$  und Analoges für  $w_1$  und  $w_2$ , nach Summation

$$A(w_i) \leq A(r_i). \tag{1}$$

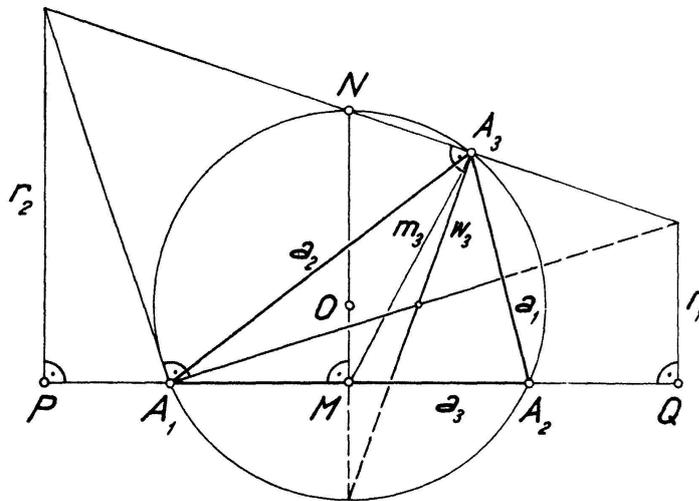


Fig. 1

Im spitzwinkligen  $\Delta$ , Fig. 1, ist stets  $m_3 \leq \overline{MN}$ , Analoges gilt für  $m_1$  und  $m_2$ , demnach  $A(m_i) \leq A(r_i)$ . Fig. 2 dagegen zeigt, dass im stumpfwinkligen  $\Delta$   $m_3 \geq \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ , weshalb wir durch Summation allein keine bindende Aussage gewinnen. Dagegen gilt ersichtlich  $m_1 < \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$ ,  $m_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$  – Verbindung der Seitenmitten; eine Dreieckseite ist kleiner als die Summe der beiden andern – und  $m_3 < R$ , somit

$$\sum m_i < R + \frac{a_3}{2} + s < 2R + s.$$

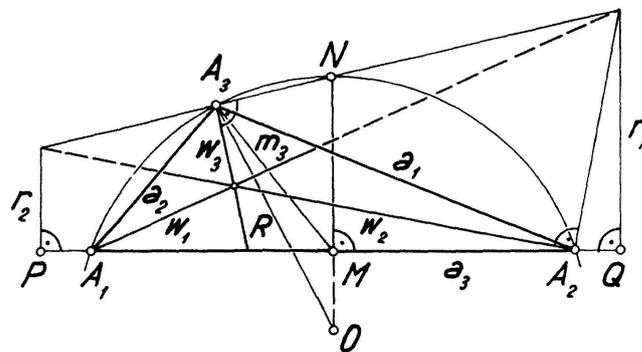


Fig. 2

Für ein beliebiges  $\Delta$  gilt

$$s^2 = r^2 + 4Rr + 4R^2(1 + \Pi \cos \alpha_i),$$

für das stumpfwinklige demnach

$$s < r + 2R \text{ wegen } \Pi \cos \alpha_i < 0$$

und damit wegen Vorangehendem

$$\sum m_i < 4R + r = \sum r_i,$$

womit der Beweis für

$$A(m_i) \leq A(r_i) \tag{2}$$

vollständig ist.

Dank  $m_i$  entstehen aus  $\alpha_i$  die beiden Teilwinkel  $\alpha_{i1}$  und  $\alpha_{i2}$ . Es gilt

$$m_i = \frac{a_i}{2} \sqrt{\frac{\sin \alpha_{i-1} \sin \alpha_{i+1}}{\sin \alpha_{i1} \sin \alpha_{i2}}} \geq \frac{a_i}{2 \sin \frac{\alpha_i}{2}} \sqrt{\sin \alpha_{i-1} \sin \alpha_{i+1}}$$

und demnach

$$\prod m_i \geq \frac{1}{8} \prod \frac{a_i \sin \alpha_i}{\sin \frac{\alpha_i}{2}} = \prod a_i \cos \frac{\alpha_i}{2} = \prod r_i,$$

was mit

$$G(m_i) \geq G(r_i) \tag{3}$$

gleichbedeutend ist.

*Bemerkung:* Durch den Beweis von (I) haben wir gezeigt, dass sich die arithmetischen und geometrischen Mittel der Seitenhalbierenden und Ankreisradien *gegensätzlich* verhalten. Dagegen stösst man auf das «normale» *gleichartige* Verhalten, wenn man die Winkelhalbierenden an die Stelle der Seitenhalbierenden setzt. Es ist nämlich

$$w_i = \frac{2 a_{i-1} a_{i+1}}{a_{i-1} + a_{i+1}} \cos \frac{\alpha_i}{2} \leq \sqrt{a_{i-1} a_{i+1}} \cos \frac{\alpha_i}{2}$$

wegen  $H \leq G$ , somit

$$\prod w_i \leq \prod a_i \cos \frac{\alpha_i}{2} = \prod r_i,$$

das heisst

$$G(w_i) \leq G(r_i) \tag{4}$$

(1) und (4) repräsentieren das behauptete gleichartige Verhalten. In (1) erkennt man übrigens ein Korollarium der schärferen Ungleichung (2).

### 3. Seiten und Ankreisradien

Aus  $r_i = s \operatorname{tg} \alpha_i/2$  folgert man

$$\sum r_i = s \sum \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} \geq 3 s \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = s \sqrt{3}$$

und damit

$$2 A(r_i) \geq \sqrt{3} A(a_i). \tag{5}$$

Schliesslich folgt aus

$$\prod r_i = \prod a_i \cos \frac{\alpha_i}{2} \leq \frac{3 \sqrt{3}}{8} \prod a_i$$

in der Tat

$$2 G(r_i) \leq \sqrt{3} G(a_i). \tag{6}$$

Kürzer kann der Beweis von (II) kaum geführt werden. Mit einer guten Klasse ist es bei wenig Zeitaufwand möglich, die Jensensche Ungleichung für eine Variable etwa im Anschluss an das Kapitel „Bedeutung der zweiten Ableitung für den Kurvenverlauf“ zu behandeln. Da wir aber keiner Überladung des Stoffprogramms das Wort reden wollen, haben wir beim Beweis der übrigen Ungleichungen zum Teil mit Absicht andere Wege aufgezeigt.

Es mag noch erwähnt werden, dass heute etliche Länder Anstrengungen machen<sup>3)</sup>, den jungen Menschen den Übergang von der Mittelschule zur Universität durch die Besprechung derartiger Ungleichungsprobleme zu erleichtern. Die dem Verfasser zugängliche Literatur enthält jedoch keine der Ungleichungen (1) bis (6), so dass ihm vor allem

$$A(w_i) \leq A(m_i) \leq A(r_i),$$

jedoch

$$G(w_i) \leq G(r_i) \leq G(m_i)$$

eine kleine Überraschung bedeutete.

F. LEUENBERGER, ZUOZ

<sup>3)</sup> Vergleiche u. a. DE FRANCIS J., *Mathematical competitions in China*, Punkt 3, Amer. Math. Monthly 67, 8, S. 758, 1960. Ebenso KÜNZI, H. P., *Lineare Programmierung*, «persönliche Bemerkung», El. Math. XVI, 1, S. 1, 1961.

### Ein Reduktionsverfahren für Determinanten und Gleichungssysteme

Der Wert einer Determinante, deren Elemente numerisch gegeben sind, kann nach einer einfachen Rechenvorschrift berechnet werden. Das Verfahren eignet sich besonders für eine elektrische Tischrechenmaschine, bei der man positive und negative Produktsummen im Ergebniswerk auflaufen lassen kann. Nach einer entsprechenden Rechenvorschrift ist auch die Auflösung von Gleichungssystemen und die Matrizeninversion möglich.

#### 1. Die Reduktion einer Determinante

Das Verfahren wird an einem Zahlenbeispiel gezeigt. In der Determinante (1) sind die Zeilen mit  $i$ , die Spalten mit  $k$  bezeichnet. Die Zeilensummen ergeben eine weitere Spalte  $\Sigma$ . Der Grad der Determinante sei  $n$ :

$$\begin{array}{c} \Sigma \\ \left| \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 5 & 12 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ -4 & -4 & 1 & 6 & -1 \end{array} \right|. \end{array} \quad (1)$$

Nach dem Satz 14 in [1], S. 24, werde die erste Zeile mit  $a_{i1}/a_{11}$  multipliziert und von der  $i$ -ten Zeile subtrahiert.  $i$  geht von 2 bis  $n$ . Mit den Zeilensummen wird ebenso verfahren wie mit den Elementen. Nach der Berechnung jeder Zeile folgt die Probe durch Addieren der neuen Elemente.

So entsteht die Determinante (2), bei der in der ersten Spalte nur noch ein Element von Null verschieden ist, da die erste Zeile unverändert übernommen wird:

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 9 \end{array} \right|. \quad (2)$$

Das Element  $a_{11}$  muss mit der Unterdeterminante der zweiten bis vierten Zeile und Spalte multipliziert werden. Statt nur *eine* Zeile oder Spalte zu multiplizieren, wie dies nach Satz 12 in [1], S. 23, nötig wäre, multipliziert man alle Elemente und setzt dafür  $1/a_{11}^{n-2}$  – in vorliegendem Falle  $(1/2)^2$  – vor die neue Determinante, die nur noch vom dritten Grad ist:

$$\frac{1}{4} \left| \begin{array}{ccc|c} -12 & 8 & -2 & -6 \\ -8 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 20 & 18 \end{array} \right|. \quad (3)$$

Die Elemente  $b_{ik}$  der reduzierten Determinante ergeben sich aus den Elementen  $a_{ik}$  der ursprünglichen Determinante nach

$$b_{i-1, k-1} = a_{11} a_{ik} - a_{i1} a_{1k}. \quad (4)$$

Die neue Determinante wird noch durch  $a^{n-2}$  dividiert. Die Vorschrift lässt sich darstellen:

$$\left| \begin{array}{cc|c} a_n & -a_{nk} \\ a_{in} & +a_{ik} \end{array} \right| = \frac{1}{a_n^{n-2}} \left| \begin{array}{c} \dots \\ b_{i-1, k-1} \\ \dots \end{array} \right|. \quad (5)$$

Die Summenprobe erfolgt nach:

$$a_{11} \left( a_{i1} + \sum_{k=2}^n a_{ik} \right) - a_{i1} \left( a_{11} + \sum_{k=2}^n a_{1k} \right) = \sum_{k=2}^n b_{i-1, k-1}. \quad (6)$$

Das obige Beispiel wird zu Ende gerechnet:

$$D = -\frac{1}{4} \frac{1}{12} \left| \begin{array}{cc|c} 40 & -40 & 0 \\ 24 & -240 & -216 \end{array} \right| = -\frac{1}{48} (-8640) = 180. \quad (7)$$

Für die Reduktion kann auch ein anderes Element als  $a_{11}$  benutzt werden, wenn dann in der entsprechenden Weise vorgegangen wird. In [2], S. 45, ist eine andere Darstellung des Verfahrens gegeben.

### 2. Die Reduktion eines Gleichungssystems

Auch bei einem Gleichungssystem von der Form

$$\mathfrak{A}_x \mathfrak{x} = \mathfrak{A}_y \eta, \quad (8)$$

das eine lineare Beziehung zwischen den Grössensystemen

$$\mathfrak{x} = (x_1 \dots x_n)$$

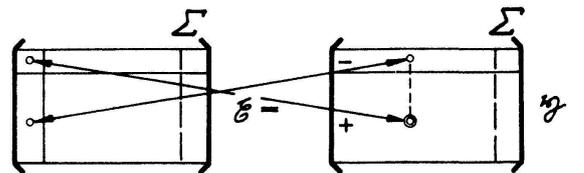
und

$$\eta = (y_1 \dots y_n)$$

mit den numerisch gegebenen Koeffizienten  $a_{ik}$  der Matrizen  $\mathfrak{A}_x$  und  $\mathfrak{A}_y$  darstellt, kann das Verfahren angewendet werden. Es muss nur die Determinante der Matrix  $\mathfrak{A}_x$  von Null verschieden sein, da sonst eine Transformation nach

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}_x^{-1} \mathfrak{A}_y \eta \quad (9)$$

grundsätzlich nicht möglich ist. Hier wird nach der gleichen Vorschrift gerechnet:



$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & \Sigma \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & \Sigma \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \eta. \quad (10)$$

Dabei wird auch die rechts stehende Matrix einbezogen. Die Division fällt hier weg, da sie sich auf beide Seiten der Gleichung bezieht. Die Summenprobe wird auf beiden Seiten getrennt durchgeführt.

Der Fall des inhomogenen Gleichungssystems

$$\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{a}, \quad (11)$$

bei dem  $\mathfrak{a}$  einen Spaltenvektor mit numerisch gegebenen Komponenten darstellt, kann in der gleichen Weise behandelt werden (vgl. [3], S. 107). Die Anzahl der durchzuführenden Operationen ist zwar grösser als beim Gaußschen Algorithmus. Es kommt aber keine Division vor, welche den Rechnungsgang bei Tischrechenmaschinen wesentlich erschwert (Vorzeichen, Stellung des Kommas).

Im Falle

$$\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \eta \quad (12)$$

wird die Kehrmatrix  $\mathfrak{A}^{-1}$  berechnet mit

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1} \eta. \quad (13)$$

Es folgt noch ein Zahlenbeispiel:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 2 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 12 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 5 & 17 \\ 3 & 7 & 6 & 16 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{array} \right] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Durch zweimaliges Reduzieren jeweils mit dem Element der obersten Zeile und linken Spalte erhält man

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 22 & 38 & 60 \\ 4 & 26 & 30 \end{array} \right] \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 41 & 32 & 78 \\ -1 & 24 & 9 & 32 \end{array} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

und

$$\left[ \begin{array}{c|c} 420 & 420 \end{array} \right] x_3 = \left[ \begin{array}{ccc|c} -42 & 364 & 70 & 392 \end{array} \right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$x_3 = \left[ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{10} & \frac{13}{15} & \frac{1}{6} \end{array} \right] \eta. \quad (17)$$

Mit der ersten Gleichung aus (15) erhält man  $x_2$  und mit der ersten Gleichung (14)  $x_1$ . Das Resultat ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/6 \\ 2/5 & 11/30 & 7/6 \\ -1/10 & 13/15 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

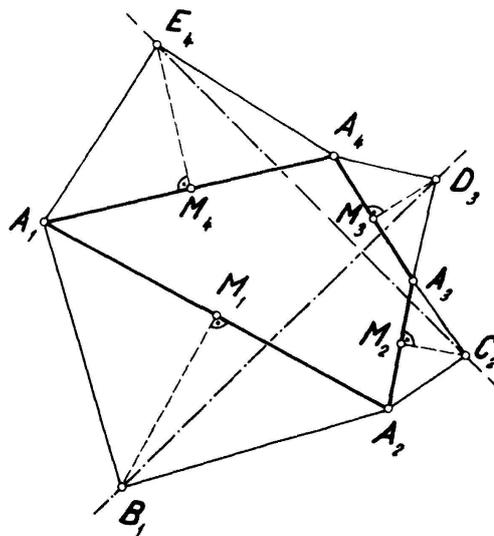
B. JÄGER, Stuttgart

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] F. NEISS, *Determinanten und Matrizen*, 4. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.
- [2] A. C. AITKEN, *Determinants and Matrices*, 9. Aufl., Edinburgh und London 1958.
- [3] E. BODEWIG, *Matrix Calculus*, 2. Aufl., Amsterdam 1959.

#### Vektorieller Beweis eines elementargeometrischen Satzes

Es ist wohlbekannt, dass viele Sätze der Elementargeometrie auf sehr übersichtliche Weise und manchmal in etwas allgemeinerer Fassung mit Hilfe der Vektorrechnung bewiesen werden können. Die folgende Mitteilung liefert ein interessantes und, soviel ich weiss, neues Beispiel dafür.



In der Sammlung *Exercices de Géométrie* par F. G.-M., 7<sup>e</sup> éd., p. 519, findet man folgenden Satz, der dem Inspecteur des ponts et chaussées ED. COLLIGNON zugeschrieben wird.

**Satz.** Es sei  $A_1A_2A_3A_4$  ein ebenes Viereck. Auf den Seiten  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_4A_1$  als Hypotenusen konstruiere man, allemal entweder nach der Aussen- oder nach der Innenseite des Vierecks in seiner Ebene, die gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecke

$$A_1A_2B_1, \quad A_2A_3C_2, \quad A_3A_4D_3, \quad A_4A_1E_4.$$

Dann sind die Diagonalen  $B_1D_3$  und  $C_2E_4$  des Vierecks  $B_1C_2D_3E_4$  gleichlang und zueinander senkrecht.

Wir beweisen den Satz vektoriell in folgender, ein wenig allgemeiner Fassung:

**Satz.** In einer orientierten Ebene  $p$  betrachte man einen beliebigen geschlossenen Streckenzug  $A_1A_2A_3A_4A_1$ . Man drehe seine orientierten Strecken  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ ,  $\overline{A_3A_4}$ ,  $\overline{A_4A_1}$  in der Ebene  $p$  um ihre respektiven Mittelpunkte  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  um den Winkel  $+\pi/2$ ; dabei bekomme man respektive die orientierten Strecken  $\overline{B_1B_2}$ ,  $\overline{C_2C_3}$ ,  $\overline{D_3D_4}$ ,  $\overline{E_4E_1}$ . Es sind dann die Strecken  $\overline{B_1D_3}$  und  $\overline{C_2E_4}$  gleichlang und zueinander senkrecht, ebenso die Strecken  $\overline{B_2D_4}$  und  $\overline{C_3E_1}$ .

**Beweis.** Zur Bezeichnung einer Drehung in der orientierten Ebene  $p$  um einen positiven rechten Winkel führen wir den Operator  $i$  multiplikativ ein. Wir bezeichnen also mit  $i\overline{AB}$  den (freien) Vektor, der entsteht, wenn der (freie) Vektor  $\overline{AB}$  in der Ebene  $p$  um den Winkel  $+\pi/2$  gedreht wird. Man sieht leicht ein, dass folgende vektorielle Beziehung gilt:

$$i(\lambda\overline{AB} + \mu\overline{A'B'} + \dots) = \lambda(i\overline{AB}) + \mu(i\overline{A'B'}) + \dots,$$

wobei  $\lambda, \mu, \dots$  reelle Faktoren bedeuten.

Wir können jetzt die Behauptung des Satzes durch die Beziehungen formulieren:

$$\overline{C_2E_4} = i\overline{B_1D_3}, \quad \overline{C_3E_1} = -i\overline{B_2D_4}.$$

Es genügt, die erste dieser Beziehungen zu erhärten; der Nachweis für die zweite verläuft in ähnlicher Weise.

Nach der Definition der Addition von Vektoren hat man

$$\begin{aligned} \overline{C_2E_4} &= \overline{C_2M_2} + \overline{M_2A_2} + \overline{A_2A_1} + \overline{A_1M_4} + \overline{M_4E_4}, \\ \overline{C_2E_4} &= \overline{C_2M_2} + \overline{M_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_4M_4} + \overline{M_4E_4}. \end{aligned}$$

Daraus, wenn man die Beziehungen  $\overline{M_2A_2} = -\overline{M_2A_3}$  und  $\overline{A_1M_4} = -\overline{A_4M_4}$  berücksichtigt, seitenweise addiert und mit  $1/2$  multipliziert, bekommt man:

$$\overline{C_2E_4} = \overline{C_2M_2} + \frac{1}{2}\overline{A_2A_1} + \frac{1}{2}\overline{A_3A_4} + \overline{M_4E_4}. \tag{1}$$

Auf ähnliche Weise erhält man:

$$\overline{B_1D_3} = \overline{B_1M_1} + \frac{1}{2}\overline{A_2A_3} + \frac{1}{2}\overline{A_1A_4} + \overline{M_3D_3}. \tag{2}$$

Wir multiplizieren nun die Gleichung (2) mit  $i$  beiderseits und finden:

$$i\overline{B_1D_3} = i\overline{B_1M_1} + \frac{1}{2}i\overline{A_2A_3} + \frac{1}{2}i\overline{A_1A_4} + i\overline{M_3D_3}.$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned} i\overline{B_1M_1} &= \overline{A_2M_1} = \frac{1}{2}\overline{A_2A_1}, & \frac{1}{2}i\overline{A_2A_3} &= i\overline{A_2M_2} = \overline{C_2M_2}, \\ \frac{1}{2}i\overline{A_1A_4} &= i\overline{M_4A_4} = \overline{M_4E_4}, & i\overline{M_3D_3} &= \overline{M_3A_4} = \frac{1}{2}\overline{A_3A_4}; \end{aligned}$$

also hat man

$$i\overline{B_1D_3} = \frac{1}{2}\overline{A_2A_1} + \overline{C_2M_2} + \overline{M_4E_4} + \frac{1}{2}\overline{A_3A_4}. \tag{3}$$

Der Vergleich von (3) und (1) ergibt:

$$\overline{C_2 E_4} = i \overline{B_1 D_3}, \quad \text{was zu beweisen war.}$$

**Anmerkung.** Der ebene Streckenzug  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_1$  ist ganz beliebig; insbesondere kann er einfach sein oder sich durchkreuzen, er darf ganz oder teilweise auf gerader Linie verlaufen, endlich dürfen einige seiner Strecken Nullstrecken sein. N. KRITIKOS, Athen

### Inequalities for a triangle, II

In this note  $\rho_i$  and  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) denote the radii of the ex-circles and the altitudes of a triangle with the sides  $a_1, a_2, a_3$ ;  $F$  denotes its area.  $G(x)$  and  $H(x)$  denote the geometric and harmonic means of  $x_1, x_2, x_3$  respectively.

In [1] it is proved that  $G(h) \leq G(\rho)$ . Here I prove the inequalities

$$G(h) \leq 3^{1/4} F^{1/2} \leq G(\rho), \quad (1)$$

$$H(h) = H(\rho) \leq 3^{1/4} F^{1/2}. \quad (2)$$

*Proof:* It is known that

$$3^{3/2} r^2 \leq F \leq \frac{3^{3/2}}{4} R^2,$$

where  $r$  and  $R$  denote the radii of the inscribed and circumscribed circles (see [2], p. 6). Hence

$$2 R^{-1} \leq 3^{3/4} F^{-1/2}, \quad (3)$$

$$r^{-1} \geq 3^{3/4} F^{-1/2}. \quad (4)$$

From the identity  $8 F^3 = G^3(h) a_1 a_2 a_3 = G^3(h) \cdot 4 R F$  and from (3) it follows that

$$G^3(h) = 2 R^{-1} F^2 \leq 3^{3/4} F^{3/2}.$$

Hence we get the first part of (1).

From the identity  $\rho_1 \rho_2 \rho_3 = F^2 r^{-1}$  and from (4) it follows that

$$G^3(\rho) \geq 3^{3/4} F^{3/2}.$$

Hence we get the second part of (1).

The inequality (2) follows immediately from the identity  $\sum_{i=1}^3 h_i^{-1} = \sum_{i=1}^3 \rho_i^{-1} = r^{-1}$  and from (4).

A. MAKOWSKI, Warsaw

#### REFERENCES

- [1] A. MAKOWSKI, *Inequalities for a triangle*, *El. Math.* 16 (1961), p. 60–61.  
 [2] L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

## Aufgaben

**Aufgabe 387.** Auf einem nichtzerfallenden Kegelschnitt  $k$  seien fünf Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  und  $S$  gegeben. Bekanntlich ist das Doppelverhältnis  $\delta = ([S P_1] [S P_2] [S P_3] [S P_4])$  der vier Strahlen  $[S P_i], i = 1, 2, 3, 4$  gegenüber einer Bewegung von  $S$  auf  $k$  invariant.

a) Wie müssen die Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  auf  $k$  gewählt werden, damit  $\delta = -1$  wird?  
 b) Wie muss die gegenseitige Lage von  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sein, wenn  $\delta = -1$  und  $k$  eine Parabel ist?

c) In einem kartesischen Normalkoordinatensystem sind die Punkte  $P_1(0, 0), P_2(0, -1), P_3(1, 0)$  gegeben. Wie ist  $P_4$  anzunehmen, wenn bei  $\delta = -1$  der Kegelschnitt  $k$   $\alpha$ ) eine Parabel,  $\beta$ ) eine gleichseitige Hyperbel,  $\gamma$ ) ein Kreis sein soll?

R. BEREIS und E. SCHRÖDER, Dresden

*Lösung der Aufgabensteller:* Eine Kollineation  $K$ , die die Punkte  $P_3, P_4$  in die absoluten Kreispunkte der Ebene von  $k$  transformiert, führt  $k$  in einen Kreis  $k'$  durch  $P_1', P_2', S'$  über. Aus den Verbindungsgeraden  $[S P_3], [S P_4]$  werden die isotropen Geraden  $i_1', i_2'$  durch  $S'$ .