Aufgaben

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **16 (1961)**

Heft 4

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21290

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 378. Seien $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ Unbestimmte. Man zeige, dass die beiden formalen Potenzreihen

$$v(t) = 1 - \sigma_1 t + \sum_{\nu=2}^{\infty} \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \nu-1 \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1} & \cdot & \sigma_1 \end{vmatrix} \frac{(-t)^\nu}{\nu!},$$

$$w(t) = 1 + \sigma_1 t + \sum_{\nu=2}^{\infty} \begin{vmatrix} \sigma_1 & -1 & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & -2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\nu+1 \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1} & \cdot & \sigma_1 \end{vmatrix} \frac{t^\nu}{\nu!}$$

für alle t reziprok zueinander sind: $v(t)\, w(t) = 1$. I. PAASCHE, München

Lösung des Aufgabenstellers: Wir setzen $w(t) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu t^\nu$ mit von t unabhängigen w_ν; ferner $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu t^{\nu-1} = \sigma(t)$. Dann gilt für alle t

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \sigma(t)\,, \tag{1}$$

weil dies auf Grund des Koeffizientenvergleichs in $w' = w\,\sigma$ bei $t^0, t^1, \ldots$ mit

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & -1 & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & -2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix} \tag{2}$$

äquivalent ist und dieses Gleichungssystem nach der Cramerschen Regel die verlangte Lösung

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & -1 & & \\ \sigma_2 & \sigma_1 & -2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\nu+1 \\ \sigma_\nu & \sigma_{\nu-1} & \cdot & \sigma_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \nu \end{vmatrix} = w_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

besitzt. Gemäss (1) ist

$$\ln w(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau\,,$$

also

$$w(t) = e^{\int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau}$$

und

$$\frac{1}{w(t)} = e^{\int_0^t -\sigma(\tau)\, d\tau} = v(t)\,,$$

weil auch im Aufgabentext beim Übergang von $w(t)$ zu $v(t)$ nur alle σ_ν durch $-\sigma_\nu$ zu ersetzen sind. Damit ist die Aufgabe gelöst. – Da (2) bei gegebenen w_ν eindeutig nach den σ_ν aufgelöst werden kann, handelt es sich hier bei $w(t)$ nicht um eine spezielle Potenzreihe, sondern um die allgemeine Taylorreihe mit $w(0) = 1$.

L. CARLITZ (Duke University, Durham, N. C. USA) weist in seiner Lösung auf einen ähnlichen Beweis in D. E. LITTLEWOOD: *The theory of group characters*, Oxford, 1940, pp. 82–84 hin. Eine weitere Lösung sandte O. REUTTER (Ochsenhausen).

Aufgabe 379. Die Punkte $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$ $(k \geqq 3)$ seien die Eckpunkte eines geschlossenen Polygons Π in der Ebene. Die Punkte $P_0', P_1', \ldots, P_{k-1}'$ mögen die Seiten $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{k-1}P_0$ von innen im Verhältnis $p : q$ teilen. Die Teilpunkte sind dann die Eckpunkte eines neuen Polygons Π'. Durch Wiederholung des gleichen Konstruktionsverfahrens gelangt man von Π' zu einem Polygon Π'' usw. Nach n Schritten erhält man das Polygon $\Pi^{(n)}$ mit den Eckpunkten $P_0^{(n)}, P_1^{(n)}, \ldots, P_{k-1}^{(n)}$. Man zeige, dass die Punkte $P_i^{(n)}$ $(0 \leqq i \leqq k-1)$ für $n \to \infty$ gegen den Schwerpunkt S von Π konvergieren. E. HERRMANN, Porz a. Rhein

Solution: Let the vertex $P_\mu^{(n)}$ be denoted by $z_\mu^{(n)}$ in the complex plane, for all $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, with $z_{\mu+k}^{(n)} = z_\mu^{(n)}$, and all $n = 0, 1, 2, \ldots$, with $P_\mu^{(0)} = P_\mu$. We are given that

$$z_\mu^{(n)} = p\, z_\mu^{(n-1)} + q\, z_{\mu+1}^{(n-1)}\,, \quad p + q = 1\,, \tag{1}$$

or in symbolic notation:

$$z_\mu^{(n)} = (p + E\,q)\, z_\mu^{(n-1)}\,, \quad Ez_\mu = z_{\mu+1}\,, \quad E^k = 1\,. \tag{2}$$

The mean centre S, denoted by $\mathfrak{H}$, is incidentally the mean centre of each $\Pi^{(n)}$, and is given by

$$k\,\mathfrak{H} = z_0 + z_1 + \cdots + z_{k-1} = z_0^{(n)} + z_1^{(n)} + \cdots + z_{k-1}^{(n)}\,, \tag{3}$$

by (1). We have to show that for each fixed rank μ,

$$\lim_{n\to\infty} z_\mu^{(n)} = \mathfrak{H}\,. \tag{4}$$

Since any one vertex of Π may be chosen as the first, it suffices to prove (4) for $\mu = 0$, to simplify the notation. From (2) we derive

$$z_0^{(n)} = (p + q\,E)^n\, z_0\,, \quad p + q = 1\,, \quad E^k = 1\,. \tag{5}$$

Expanding and regrouping, we obtain

$$z_0^{(n)} = C_0^{(n)}\, z_0 + C_1^{(n)}\, z_1 + \cdots + C_{k-1}^{(n)}\, z_{k-1}\,, \tag{6}$$

where $C_\nu^{(n)}$ is the sum of the coefficients of ranks $\nu, \nu + k, \nu + 2k, \ldots$ in the expansion of $f(X) = (p + q X)^n$ in powers of X. These coefficients are easily picked out by the familiar device of forming

$$F_\nu(X) = f(X) + \omega^{-\nu} f(\omega X) + \omega^{-2\nu} f(\omega^2 X) + \cdots + \omega^{-(k-1)\nu} f(\omega^{k-1} X), \tag{7}$$

where ω is the kth root of unity:

$$\omega = e^{2\pi i/k}. \tag{8}$$

The coefficients in the expansion of $F_\nu(X)$ in powers of X are those of $f(x)$ multiplied by k for the ranks $\nu, \nu + k, \nu + 2k, \ldots$, and zero for all other ranks. Hence

$$k C_\nu^{(n)} = F_\nu(1) = (p + q)^n + \omega^{-\nu} (p + \omega q)^n + \omega^{-2\nu} (p + \omega^2 q)^n + \cdots + \omega^{-(k-1)\nu} (p + \omega^{k-1} q)^n. \tag{9}$$

The first term $(p + q)^n = 1$ for each n. The second has modulus r^n, with

$$r^2 = p^2 + q^2 + 2 p q \cos(2\pi/k) < (p + q)^2 = 1, \tag{10}$$

while all the others are less, or at most equal to it, as easily seen on a diagram. So each of these $k - 1$ terms after the first tends to 0 as $n \to \infty$. Hence (6) gives

$$\lim_{n\to\infty} k z_0^{(n)} = z_0 + z_1 + \cdots + z_{k-1} = k \mathfrak{H}, \quad \text{q.e.d.} \tag{11}$$

R. C. H. TANNER, London, H. D. URSELL, Leeds

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), G. GEISE (Dresden), W. JÄNICHEN (Berlin), O. REUTTER (Ochsenhausen). Eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe hat G. GEISE in seiner in diesem Heft veröffentlichten Arbeit behandelt.

Aufgabe 380. Sei G der Schwerpunkt, (O, r) die Umkugel eines n-dimensionalen Simplex A_i $(i = 1, \ldots, n + 1)$. Es sei weiterhin α_i der Winkel A_iOG.

a) Beweise, dass für $\overline{OG} \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \cos\alpha_i = (n + 1) \frac{\overline{OG}}{r}.$$

b) Was bedeutet obige Gleichung, wenn $O \equiv G$? J. SCHOPP, Budapest

Lösung: Take O as origin of vectors, $\vec{OG} = \boldsymbol{g}$, $\vec{OA}_i = \boldsymbol{a}_i$, $|\boldsymbol{a}_i| = r$, $|\boldsymbol{g}| = s$. Then

$$\sum_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{a}_i = (n + 1) \boldsymbol{g}. \tag{1}$$

With *any* fixed vector $\vec{OK} = \boldsymbol{k}$ of length $|\boldsymbol{k}| = t$, (1) gives

$$\sum \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{k} = (n + 1) \boldsymbol{g} \boldsymbol{k},$$

$$r t \sum \cos A_iOK = (n + 1) s t \cos GOK. \tag{2}$$

In general, i. e. if $s \neq 0$, we can take $K = G$, and obtain

$$\sum \cos\alpha_i = (n + 1) \frac{s}{r}$$

as required in a). If $s = 0$, α_i becomes indeterminate: but from (2)

$$\sum_{i=1}^{n+1} \cos A_i OK = 0 \tag{3}$$

for any direction OK. This is the answer to b). H. D. URSELL, Leeds

Weitere Lösungen sandten B. BOLLOBÁS (Budapest), K. GRÜN (Linz), F. LEUENBERGER (Zuoz), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen), H. VOGLER (Wien).

Aufgabe 381. Aus den Beziehungen ($l = 1093$, Primzahl)

$$2^{14} = 15\,l - 11$$
$$3^2\,11^2 = l - 4$$
$$3^7 = 2\,l + 1$$

ist durch ganz kurze Rechnung

$$2^{l-1} \equiv 1 \pmod{l^2}$$

zu beweisen. L. HOLZER, Rostock

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} l - 4 = 3^2\,11^2 &\equiv 3^2\,(2^{28} - 15 \cdot 2^{15}\,l) \pmod{l^2} \\ &\equiv 3^2\,2^{28} + 270 \cdot 11\,l \\ &\equiv 3^2\,2^{28} + 2970\,l\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} 3^2\,2^{28} &\equiv -4 - 2969\,l \\ &\equiv -4 - 1876\,l\,. \end{aligned}$$

Damit gewinnt man

$$3^2\,2^{26} \equiv -1 - 469\,l\,.$$

Erhebt man diesen Ausdruck in die 7. Potenz, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 3^{14}\,2^{182} &\equiv -1 - 3283\,l \\ &\equiv -1 - 4\,l \\ &\equiv -3^{14}\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$2^{182} \equiv -1\,,$$

und wenn man noch dieses Ergebnis in die 6. Potenz erhebt, so folgt die Behauptung

$$2^{l-1} \equiv +1 \pmod{l^2}\,.$$

EKKEHARD KRÄTZEL, Jena

Einen ähnlichen Beweis findet man in HARDY and WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3. ed., p. 73.

Aufgabe 382. Show that

$$\sum_{x,y=0}^{p-1}\left(\frac{a\,x^2\,y^2 - b\,x^2 - c\,y^2 + d}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) + p\left\{\left(\frac{a}{p}\right) + \left(\frac{b}{p}\right) + \left(\frac{c}{p}\right) + \left(\frac{d}{p}\right)\right\}\left(\frac{a\,d - b\,c}{p}\right)$$

where p is an odd prime, (a/p) is the Legendre symbol and $a\,b\,c \not\equiv 0 \pmod{p}$.

L. CARLITZ, Durham N. C. USA

Solution by the proposer: We recall the formula of Jacobsthal[1])

$$\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x^2 + r}{p}\right) = \begin{cases} -1 & (r \not\equiv 0)\,, \\ p - 1 & (r \equiv 0)\,. \end{cases}$$

[1]) Cf. H. HASSE, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, p. 147–148 (Editorial Note).

Then

$$S = \sum_{x,y}\left(\frac{a x^2 y^2 - b x^2 - c y^2 + d}{p}\right) = \sum_x \sum_y \left(\frac{(a x^2 - c) y^2 - (b x^2 - d)}{p}\right)$$

$$= \sum_{a x^2 \equiv c} p\left(\frac{-b x^2 + d}{p}\right) - \sum_{\substack{a x^2 \not\equiv c \\ b x^2 \not\equiv d}} \left(\frac{a x^2 - c}{p}\right) + (p-1) \sum_{\substack{a x^2 \not\equiv c \\ b x^2 \equiv d}} \left(\frac{a x^2 - c}{p}\right)$$

$$= \sum_{a x^2 \equiv c} p\left(\frac{-b x^2 + d}{p}\right) - \sum_{b x^2 \not\equiv d} \left(\frac{a x^2 - c}{p}\right) + (p-1) \sum_{b x^2 \equiv d} \left(\frac{a x^2 - c}{p}\right)$$

$$= p\left\{1 + \left(\frac{ac}{p}\right)\right\}\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a d - b c}{p}\right) - \sum_x \left(\frac{a x^2 - c}{p}\right) + p \sum_{b x^2 \equiv d} \left(\frac{a x^2 - c}{p}\right)$$

$$= p\left\{\left(\frac{a}{p}\right) + \left(\frac{c}{p}\right)\right\}\left(\frac{a d - b c}{p}\right) + \left(\frac{a}{p}\right) + p\left\{1 + \left(\frac{b d}{p}\right)\right\}\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{a d - b c}{p}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{p}\right) + p\left\{\left(\frac{a}{p}\right) + \left(\frac{b}{p}\right) + \left(\frac{c}{p}\right) + \left(\frac{d}{p}\right)\right\}\left(\frac{a d - b c}{p}\right).$$

When $a b c \equiv 0$ the above result must be modified. Thus for $a \equiv 0$, $b c \not\equiv 0$, we have

$$\sum_{x,y}\left(\frac{-b x^2 - c y^2 + d}{p}\right) = \sum_x \sum_y \left(\frac{-c y^2 - (b x^2 - d)}{p}\right)$$

$$= (p-1) \sum_{b x^2 \equiv d} \left(\frac{-c}{p}\right) - \sum_{b x^2 \not\equiv d} \left(\frac{-c}{p}\right)$$

$$= p \sum_{b x^2 \equiv d} \left(\frac{-c}{p}\right) - \sum_x \left(\frac{-c}{p}\right)$$

$$= p\left\{1 + \left(\frac{b d}{p}\right)\right\}\left(\frac{-c}{p}\right) - p\left(\frac{-c}{p}\right),$$

so that

$$S = p\left(\frac{-b c d}{p}\right) \qquad (a \equiv 0, b c \not\equiv 0).$$

For $a \not\equiv 0$, $b \equiv 0$, $d \not\equiv 0$, we have

$$\sum_{x,y}\left(\frac{a x^2 y^2 - c y^2 + d}{p}\right) = \sum_x \sum_y \left(\frac{(a x^2 - c) y^2 + d}{p}\right)$$

$$= \sum_{a x^2 \equiv c} p\left(\frac{d}{p}\right) - \sum_{a x^2 \not\equiv c} \left(\frac{a x^2 - c}{p}\right) = p\left\{1 + \left(\frac{a c}{p}\right)\right\}\left(\frac{d}{p}\right) + \left(\frac{a}{p}\right),$$

so that

$$S = \left(\frac{a}{p}\right) + p\left(\frac{a d}{p}\right)\left\{\left(\frac{a}{p}\right) + \left(\frac{c}{p}\right)\right\} \qquad (a d \not\equiv 0,\ b \equiv 0);$$

for $d \equiv 0$ we find that

$$S = -(p-1)\left(\frac{a}{p}\right) \qquad (a c \not\equiv 0,\ b \equiv 0, d \equiv 0).$$

Eine sehr ausführliche Lösung ohne Benutzung der Formel von Jacobsthal sandte W. JÄNICHEN (Berlin).

Neue Aufgaben

Aufgabe 407. Man berechne die Diskriminante

$$D = \prod_{i<j} (x_j - x_i)^2$$

der algebraischen Gleichung

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1 = 0$$

mit den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A. AMMANN, Chexbres

Aufgabe 408. *Zwei Bälle im straffgezogenen Beutel.* Zwei Kugeln, die eine vom Radius R, die andere vom Radius r, berühren sich. Man beweise, dass die drei fundamentalen Masszahlen des kleinsten konvexen Körpers, der beide Kugeln enthält, Volumen, Oberfläche und Integral der mittleren Krümmung, folgendermassen ausgedrückt werden können:

$$\frac{4\pi}{3}\,\frac{R^5 - r^5}{R^2 - r^2}, \qquad 4\pi\,\frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2}, \qquad 4\pi\,\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

(Für die Definition der dritten Masszahl vergleiche etwa H. HADWIGER: *Altes und Neues über konvexe Körper*, III. Kapitel). G. PÓLYA, Stanford University, USA

Aufgabe 409. Aus einem genügend schmalen rechteckigen Streifen wird durch Zusammenfügen der Schmalseiten a) eine zylindrische Fläche, b) ein Möbiussches Band gebildet. Beide Flächen werden so flachgedrückt, das heisst zwischen zwei zusammenfallende Ebenen gelegt, dass nur dreieckige Selbstüberdeckungen des Streifens längs der Faltkanten auftreten. Welche Figuren werden von den durch die Faltkanten bestimmten Geraden gebildet und in welcher Beziehung stehen sie zu dem flachgedrückten Streifen?
W. JÄNICHEN, Berlin

Aufgabe 410. In der euklidischen Ebene seien zwei Punkte A und B gegeben. Durch eine Inversion an einem Kreis k mit der Mitte J und dem Radius r werden A, B in die Punkte A^*, B^* transformiert. Für welche Kreise k steht die Verbindungsgerade $[A^*\,B^*]$ auf der Geraden $[A\,B]$ normal? R. BEREIS, Dresden

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Bestimme das Volumen des Tetraeders A (2; 9; 4) B (12; 3; 3) C (14;11; 7) D (8;8;10) nach der Simpsonschen Formel

$$V = \frac{2}{3}\,a\,M\,.$$

Als windschiefe Kanten sind AB und CD zu wählen.

▶ Abstand der windschiefen Kanten $a = 6{,}794$,
Fläche des Mittelschnitts $M = 18{,}325$,
$V = 83$.

2. In einem Tetraeder sind zwei Paare windschiefer Kanten gegeben. Alle diese Kanten haben die Länge a. Die übrigen Kanten sind beide gleich x. Wie ist x zu wählen, damit das Volumen des Tetraeders ein Maximum wird?

▶ $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\, a\,, \quad V_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\, a^3\,.$

Im Falle des Maximums müssen die Flächenwinkel an den unbekannten Kanten je 90° betragen. Es ist leicht zu sehen, dass dieselbe Bedingung notwendig ist, wenn die gegebenen und gesuchten Kanten beliebige Längen haben. Nachzuweisen, dass sie auch hinreicht, dürfte die Mittel der Schulmathematik übersteigen.

3. $AB = a$ ist die Kante eines Würfels, UV eine Diagonale einer Würfelseite, die mit AB keinen Punkt gemeinsam hat. Für welchen Punkt auf UV ist die Abstandssumme von A und B ein Minimum, und wie gross ist die minimale Abstandssumme?

▶ $\Sigma_{min} = a\sqrt{3 + \sqrt{6}}\,.$

4. Zwei windschiefe Geraden AB und CD (Achsen einer Rohrleitung) sind durch zwei kongruente Viertelskreise so miteinander zu verbinden, dass die Tangente stetig verläuft.

$$A\,(7;\ 0;\ 9)\,, \qquad C\,(13;\ 10;\ 0)\,,$$
$$B\,(18;\ 5;\ 7)\,, \qquad D\,(4;\ 8;\ 7)\,.$$

▶ $r = 4{,}333.$

5. Gegeben sind drei Geraden:

$$a\ \begin{cases} A_1\,(10;\ 12;\ 12)\,, \\ A_2\,(19;\ 0;\ 2)\,, \end{cases} \qquad b\ \begin{cases} B_1\,(1;\ 12;\ 0)\,, \\ B_2\,(10;\ 0;\ 7)\,, \end{cases} \qquad c\ \begin{cases} C_1\,(0{,}5;\ 6;\ -0{,}9)\,, \\ C_2\,(5;\ 0;\ 7{,}3)\,. \end{cases}$$

Wähle auf b Punkte mit den Abszissen $x = 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10$, und zeichne durch sie Geraden, die a und c treffen. Ziehe die Aufrisse so aus, dass die erzeugte Regelfläche anschaulich wird.

▶ Hyperbolisches Paraboloid.

Literaturüberschau

The Diffusion of Counting Practices. By A. SEIDENBERG. 82 pages, 8 figures, 2 maps, 1 plate. $2.50. University of California Press, Berkeley and Los Angeles 1960.

Die Absicht der vorliegenden Arbeit ist, zu untersuchen, wie der Zählakt beim Menschen entstanden ist. Ist das Zählen intuitiven Ursprungs, sind schon bei gewissen Tieren Instinkte da, die zum Zählen treiben, kann folglich das Zählen an verschiedenen Punkten der Erde spontan *entdeckt* worden sein, oder ist das Zählen eine *Erfindung* eines einzelnen Hirns und hat es sich von einem Zentrum aus über die ganze Erde ausgebreitet? Der Verfasser ist dieser zweiten Ansicht. In einem für später angekündigten Teil seines Werkes will er zeigen, dass alles Zählen einen rein rituellen Ursprung hat, dass alle Zahlen heilig waren und erstmals auftraten beim Aufrufen der Akteure bei rituellen szenischen Darstellungen. Der Ausgangspunkt soll eines der Kulturzentren der Alten Welt sein, es ist einmal von Sumer die Rede, allerdings ohne genügende Belege.