

# Über Aufsatzdreiecke

Autor(en): **Geise, Gerhard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **16 (1961)**

Heft 4

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21287>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik*

*und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

*Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band XVI

Nr. 4

Seiten 73–96

Basel, 10. Juli 1961

## Über Aufsatzdreiecke

Die Aufgabe 379 aus den *Elementen der Mathematik* (Bd. 15 [1960], S. 71)<sup>1)</sup> kann wie folgt verallgemeinert werden:

Die Punkte  $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$  ( $k \geq 2$ ) seien Eckpunkte eines geschlossenen Polygons  $\Pi$  in der Ebene.  $P_0 P_1 P'_0, P_1 P_2 P'_1, \dots, P_{k-1} P_0 P'_{k-1}$  mögen über den Seiten  $P_0 P_1, P_1 P_2, \dots, P_{k-1} P_0$  errichtete Dreiecke sein, die alle zu einem gegebenen Dreieck  $M_0 M_1 M$  gleichsinnig ähnlich seien (es sollen die Punkte  $P_r, P_{r+1}, P'_r$  ( $r = 0, 1, \dots, k-1; P_k = P_0$ ) bez. entsprechen den Punkten  $M_0, M_1, M$ , die auch auf einer Geraden liegen dürfen; der Fall  $M = M_0$  oder  $M = M_1$  darf als uninteressant ausgeschlossen werden). Die Punkte  $P'_0, P'_1, \dots, P'_{k-1}$  sind Eckpunkte eines neuen Polygons  $\Pi'$ . Durch Wiederholung des gleichen Konstruktionsverfahrens gelangt man von  $\Pi'$  zu einem Polygon  $\Pi''$  usw. Nach  $s$  Schritten erhält man das Polygon  $\Pi^{(s)}$  mit den Eckpunkten  $P_0^{(s)}, P_1^{(s)}, \dots, P_{k-1}^{(s)}$ . Was kann man über eine Konvergenz dieses Verfahrens aussagen?

Wir fassen die Ebene als Gaußsche Zahlenebene auf und beschreiben die Punkte  $P_r$  ( $r = 0, 1, \dots, k-1$ ) durch gleichbezeichnete komplexe Zahlen. (Wenn nichts anderes verabredet wird, dann bedeuten grosse lateinische Buchstaben komplexe, kleine lateinische Buchstaben reelle Zahlen.) Als Punkte  $M_0$  und  $M_1$  wählen wir  $M_0 = 0$  und  $M_1 = 1$ . Wird dann noch durch

$$M + N = 1 \quad (1)$$

die Zahl  $N$  eingeführt (nach Verabredung ist dann  $M \cdot N \neq 0$ ), so überzeugt man sich sofort davon, dass gilt:

$$P_r^{(s+1)} = N \cdot P_r^{(s)} + M \cdot P_{r+1}^{(s)} \quad \left( \begin{array}{l} s = 0, 1, \dots; P_r^{(0)} = P_r; \\ r = 0, 1, \dots, k-1; P_k^{(s)} = P_0^{(s)} \end{array} \right) \quad (2)$$

und

$$\sum_{r=0}^{k-1} P_r^{(s)} = k \cdot S \quad (s = 0, 1, \dots), \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Die Aufgabe 379 lautet: Die Punkte  $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$  ( $k \geq 3$ ) seien Eckpunkte eines geschlossenen Polygons  $\Pi$ . Die Punkte  $P'_0, P'_1, \dots, P'_{k-1}$  mögen die Seiten  $P_0 P_1, P_1 P_2, \dots, P_{k-1} P_0$  von innen im Verhältnis  $m:n$  teilen. Die Teilpunkte sind dann die Eckpunkte eines neuen Polygons  $\Pi'$ . Durch Wiederholung des gleichen Konstruktionsverfahrens gelangt man von  $\Pi'$  zu einem Polygon  $\Pi''$  usw. Nach  $r$  Schritten erhält man das Polygon  $\Pi^{(r)}$  mit den Eckpunkten  $P_0^{(r)}, P_1^{(r)}, \dots, P_{k-1}^{(r)}$ . Man zeige, dass die Punkte  $P_i^{(r)}$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ) für  $r \rightarrow \infty$  gegen den Schwerpunkt  $S$  von  $\Pi$  konvergieren.

wobei  $S$  den Schwerpunkt von  $\Pi$  angibt, den also alle Polygone  $\Pi^{(s)}$  gemeinsam haben.

Ist jede Punktfolge  $P_r^{(0)}, P_r^{(1)}, \dots$  ( $r = 0, 1, \dots, k-1$ ) beschränkt, so soll von Konvergenz, ist wenigstens eine dieser Folgen nicht beschränkt, so soll von Divergenz des Verfahrens gesprochen werden.

Jetzt bilden wir für jedes  $s$  ( $s = 0, 1, \dots$ ) aus den  $k$  Zahlen  $P_0^{(s)}, P_1^{(s)}, \dots, P_{k-1}^{(s)}$  (in dieser Reihenfolge) einen Spaltenvektor  $\mathfrak{p}^{(s)}$  und deuten  $\mathfrak{p}^{(s)}$  als einen Punkt des komplexen euklidischen Raumes  $\mathfrak{R}_k$  der Dimension  $k$ . Mit Hilfe der (quadratischen) Matrix  $k$ -ter Ordnung<sup>2)</sup>

$$\mathfrak{Q} = \begin{vmatrix} N & M & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & N & M & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & M \\ M & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & N \end{vmatrix} \quad (4)$$

ergibt sich:

$$\mathfrak{p}^{(s+1)} = \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{p}^{(s)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}^{(s+1)} = \mathfrak{Q}^{s+1} \cdot \mathfrak{p} \quad (s = 0, 1, \dots). \quad (5)$$

Werden die  $k$ -ten Einheitswurzeln

$$\varepsilon_r = e^{\frac{2\pi i}{k} r} \quad (r = 0, 1, \dots, k-1) \quad (6)$$

eingeführt, so lassen sich die Eigenwerte  $L_0, L_1, \dots, L_{k-1}$  von  $\mathfrak{Q}$  in der folgenden Weise angeben<sup>3)</sup>:

$$L_r = N + M \cdot \varepsilon_r \quad (r = 0, 1, \dots, k-1). \quad (7)$$

Man überlegt sich sofort, dass die zu  $L_r$  gehörenden Eigenvektoren genau die Vektoren

$$\mathfrak{l}_r = C \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_r^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_r^{k-1} \end{bmatrix} \quad (r = 0, 1, \dots, k-1) \quad (8)$$

<sup>2)</sup> Matrizen dieser Bauart, wo jede Zeile aus der vorhergehenden durch zyklische Vertauschung der Zeilenelemente hervorgeht, werden manchmal zyklische Matrizen genannt. (R. ZURMÜHL nennt in seinem Buch *Matrizen*, Berlin 1950, S. 245, eine Matrix zyklisch, wenn eine endliche Potenz gleich der Einheitsmatrix ist.)

<sup>3)</sup> Vergleiche z. B. G. KOWALEWSKI, *Einführung in die Determinantentheorie*, Leipzig 1909, S. 115ff., oder W. SCHMEIDLER, *Vorträge über Determinanten und Matrizen*, Berlin 1949, S. 28f.

sind, wo  $C$  jeweils alle komplexen Zahlen durchläuft. Nun lässt sich die Matrix  $\mathfrak{Q}$  in der folgenden Form angeben:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{B} \mathfrak{d} \mathfrak{B}^{-1}, \tag{9}$$

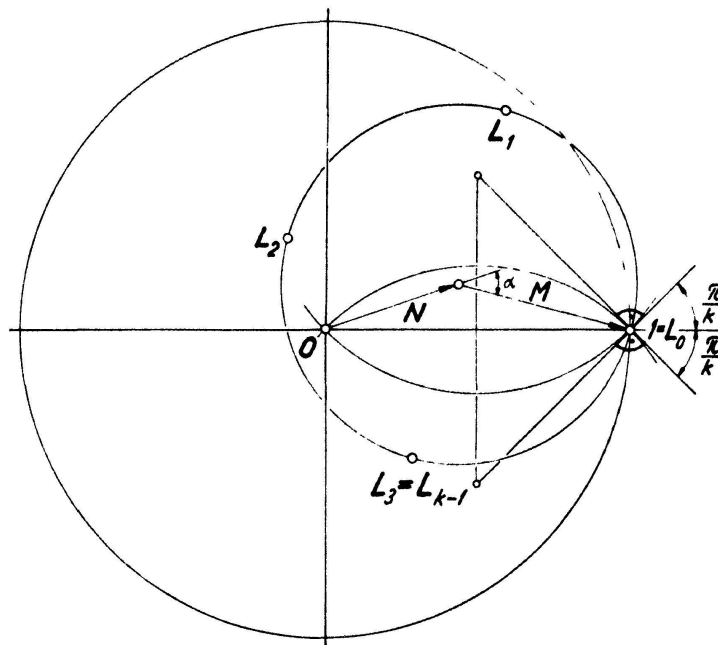
wenn gesetzt wird:

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_{k-1} \\ 1 & \varepsilon_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_{k-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon_1^{k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_{k-1}^{k-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\text{und } \mathfrak{d} = \begin{bmatrix} L_0 & & & & & \\ & L_1 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & L_{k-1} \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & L_1 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & L_{k-1} \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

und statt (5) kann geschrieben werden:

$$p^{(s+1)} = \mathfrak{B} \mathfrak{d} \mathfrak{B}^{-1} \cdot p^{(s)} \quad \text{und} \quad p^{(s+1)} = \mathfrak{B} \mathfrak{d}^{s+1} \mathfrak{B}^{-1} \cdot p \quad (s = 0, 1, \dots). \tag{5'}$$



Figur 1  
(Fall  $I_{k-1}$  für  $k = 4$ )

Es erhellt sich, dass Konvergenz oder Divergenz des Verfahrens nur von den Eigenwerten  $L_1, \dots, L_{k-1}$  der Matrix  $\mathfrak{Q}$  abhängt. Beachtet man, dass die Eigenwerte in der Gaußschen Zahlenebene auf einem Kreise um  $N$  durch 1 liegen, so ergeben sich die folgenden für eine Konvergenzuntersuchung wesentlichen Fälle (Fig. 1):

$I_j$ . ( $j = 0, \dots, k-1$ ):

$$\begin{aligned} |L_r| < 1 \text{ (bzw. } > 1) \text{ für } r = 1, \dots, j, \\ |L_r| > 1 \text{ (bzw. } < 1) \text{ für } r = j+1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

(Der Fall  $(I_{k-1})$  enthält die erwähnte Aufgabe 379, bei der  $M = \bar{M} = m$ ,  $N = \bar{N} = n$ ,  $m + n = 1$ ,  $m \cdot n > 0$  zu setzen ist.)

$II_j$ . ( $j = 1, \dots, k-1$ ):

$$\begin{aligned} |L_r| < 1 \text{ (bzw. } > 1) \text{ für } r = 1, \dots, j-1, \\ |L_j| = 1, \\ |L_r| > 1 \text{ (bzw. } < 1) \text{ für } r = j+1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Von diesen Fällen untersuchen wir nur die nicht eingeklammerten, da die in Klammern gesetzten Möglichkeiten mit einer ganz entsprechenden Behandlung zu erledigen sind. Notieren wir noch die Inverse der Matrix  $\mathfrak{B}$ , die im folgenden explizit benötigt wird:

$$\mathfrak{B}^{-1} = \frac{1}{k} \cdot \bar{\mathfrak{B}}. \quad (11)$$

Das Verfahren konvergiert nun offenbar genau dann, wenn (in allen Fällen (I) und (II)) jene Komponenten des Spaltenvektors  $\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{p}$  verschwinden, die mit Potenzen von Eigenwerten multipliziert werden, deren Beträge grösser als 1 sind, also nur genau dann, wenn die  $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$  den folgenden Bedingungen genügen:

$$0 = \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r^{-t} \cdot P_r \quad (t = j+1, \dots, k-1). \quad (12)$$

Das sind  $k-j-1$  lineare Gleichungen, deren jede eine den Nullpunkt enthaltende Hyperebene des  $\mathfrak{R}_k$  darstellt und die zusammen einen linearen Unterraum  $\mathfrak{U}_{j+1}$  der Dimension  $j+1$  in  $\mathfrak{R}_k$  definieren. Da sich die Punkte  $\mathfrak{p}$  von  $\mathfrak{U}_{j+1}$  in der Form

$$\mathfrak{p} = \sum_{r=0}^j C_r \cdot l_r \quad (13)$$

angeben lassen, wo die  $C_r$  alle komplexen Zahlen durchlaufen, kann man auch sagen: *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz des Verfahrens ist, dass der Punkt  $\mathfrak{p}$ , der das Ausgangspolygon  $\mathbb{I}$  angibt, eine Darstellung (13) besitzt.* – Ist  $j = 0$  (Fall  $I_0$ ), dann ist  $\mathfrak{U}_1$  die Gerade  $\mathfrak{p} = C_0 \cdot l_0$  durch den Nullpunkt. Das bedeutet in der Ebene, dass das Verfahren nur für die zu einem Punkt ausgearteten Polygone konvergiert. Ist  $j = k-1$  (zum Beispiel Fall  $(I_{k-1})$ , der die Aufgabe 379 enthält), dann ist die Konvergenz für jeden Punkt von  $\mathfrak{R}_k$ , also für jedes Polygon der Ebene, gesichert.

Wir setzen jetzt voraus, dass für das Polygon  $P_0, \dots, P_{k-1}$  das Verfahren konvergiert und fragen, was in der Grenze erhalten wird. Da wir jetzt (in allen Fällen [I] und [II]) auf die Eigenwerte  $L_{j+1}, \dots, L_{k-1}$  keine Rücksicht zu nehmen brauchen, ersetzen wir die Diagonalmatrix  $\mathfrak{d}$  durch die folgende<sup>4)</sup>:

$$\mathfrak{d}^* = [1, L_1, \dots, L_j, *, \dots, *], \quad (13)$$

<sup>4)</sup> Wir notieren künftig nur noch die Elemente der Hauptdiagonale.

wo die  $*$  0 oder 1 bedeuten mögen, und erhalten bei  $I_j$ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{d}^{*r} = [1, 0, \dots, 0, *, \dots, *] = \mathfrak{d}_0, \quad (14)$$

während bei  $(II_j)$  in der Grenze eine Folge von Diagonalmatrizen

$$\mathfrak{d}_t = [1, 0, \dots, 0, \eta L_j^t, *, \dots, *] \quad (t = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

zu setzen ist, wenn  $\eta$  eine «genügend hohe» Potenz von  $L_j$  bedeutet, die für einen Augenblick den nicht existierenden Grenzwert  $\lim_{r \rightarrow \infty} L_j^r$  ersetzen mag. Es ist nun leicht einzusehen, dass im Falle  $I_j$  gilt:

$$\mathfrak{B} \mathfrak{d}_0 \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{p} = S \cdot l_0 \quad \text{mit} \quad S = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} P_r, \quad (16)$$

und das bedeutet in der Ebene, dass alle Folgen  $P_r^{(0)}, P_r^{(1)}, \dots$  den Schwerpunkt  $S$  von  $\Pi$  als Grenzpunkt besitzen, und im Fall  $II_j$ :

$$\mathfrak{B} \mathfrak{d}_t \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{p} = S \cdot l_0 + L_j^t \cdot Q \cdot l_j \quad \text{mit} \quad Q = \eta \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r^{-j} \cdot P_r \quad (t = 0, 1, \dots), \quad (17)$$

und das bedeutet in der Ebene: Ist  $Q = 0$ , liegt also  $\mathfrak{p}$  nicht nur in  $\mathfrak{U}_{j+1}$ , sondern sogar in  $\mathfrak{U}_j$ , dann streben wieder alle Folgen gegen den Schwerpunkt  $S$  von  $\Pi$ . Ist aber  $Q \neq 0$  und  $k_0$  die Ordnung von  $\varepsilon_j$ , so kann man sagen, dass die Polygone  $\Pi^{(s)}$  gegen eine Folge regelmässiger  $k_0$ -Ecke mit dem gemeinsamen Schwer- und Umkreismittelpunkt  $S$  und dem gleichen Umkreisradius  $\varrho = |Q|$  streben.

Es soll noch eine Bedingung dafür aufgestellt werden, dass der Fall  $(I_{k-1})$  vorliegt, dem die Aufgabe 379 angehört. Damit alle Eigenwerte  $L_1, \dots, L_{k-1}$  im Innern des Einheitskreises liegen, braucht nur

$$|L_1|^2 < 1 \quad \text{und} \quad |L_{k-1}|^2 < 1 \quad (18)$$

zu gelten. Beachtet man die Identität  $1 = (M + N)(\bar{M} + \bar{N})$  und bezeichnet den Winkel, den die beiden «Vektoren»  $M$  und  $N$  miteinander einschliessen, mit  $\alpha$ , so folgt aus (7) und (18) nach einfacher Rechnung:

$$|\alpha| < \frac{\pi}{k}. \quad (19)$$

Diese Bedingung lässt eine einfache geometrische Deutung zu (Abb. 1): Der Punkt  $N$  muss sich im Innern eines Kreisbogen-Zweiecks mit den Ecken  $O$  und  $1$  befinden, bei dem für jeden Kreisbogen der Umfangswinkel über der Sehne  $\overline{O1}$  gleich  $\pi(k-1)/k$  ist. Wenn also das Dreieck  $O1M$  sozusagen nur «flach genug» ist, dann konvergiert das Verfahren für alle Polygone der Ebene und liefert in der Grenze den Schwerpunkt des Ausgangspolygons.

Zum Schluss behandeln wir eine Art Umkehrung der Aufgabe. Wird

$$|\mathfrak{Q}| = \prod_{r=1}^{k-1} L_r \neq 0$$

vorausgesetzt, so ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, dass durch das Polygon  $\Pi^{(s)}$  nicht nur  $\Pi^{(s+1)}$ , sondern auch  $\Pi^{(s-1)}$  eindeutig festgelegt ist. Betrachten wir

daher einmal statt der Polygonfolge  $II^{(s)}$  ( $s = 0, 1, \dots$ ) die Folge  $II^{[s]}$  ( $s = 0, 1, \dots$ ), die im Raum  $\mathfrak{R}_k$  durch

$$p^{[s+1]} = \mathfrak{Q}^{-1} \cdot p^{[s]} \quad \text{bzw.} \quad (20)$$

$$p^{[s+1]} = (\mathfrak{Q}^{-1})^{s+1} \cdot p = \mathfrak{B} \cdot \left[ 1, \frac{1}{L_1}, \dots, \frac{1}{L_{k-1}} \right]^{s+1} \cdot \mathfrak{B}^{-1} \cdot p \quad (s = 0, 1, \dots) \quad (20')$$

beschrieben wird. (Neue Aufgabe: Lässt sich die neue Polygonfolge auch konstruktiv herstellen?) Da die  $L_1, \dots, L_{k-1}$  eine der oben nicht eingeklammerten Bedingungen (I) oder (II) erfüllen, trifft jetzt der entsprechende eingeklammerte Fall zu. Wir erhalten: *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz des neuen Verfahrens ist, dass der Punkt  $p$ , der das Ausgangspolygon  $II$  angibt, in den Fällen (I) eine Darstellung*

$$p = C_0 \cdot l_0 + \sum_{r=j+1}^{k-1} C_r \cdot l_r, \quad (21')$$

in den Fällen (II) eine Darstellung

$$p = C_0 \cdot l_0 + \sum_{r=j}^{k-1} C_r \cdot l_r \quad (21'')$$

besitzt. Ist bei (I) das eine Verfahren konvergent, so ist das andere sicher divergent, und bei (II) konvergieren beide Verfahren nur genau dann, wenn gilt:

$$p = C_0 \cdot l_0 + C_j \cdot l_j.$$

*NB.* Wie Herr Prof. Dr. R. BEREIS (Dresden) dem Verfasser mitteilte, hat für den Fall, dass  $k = 3$  und das Dreieck  $M_0M_1M$  gleichseitig ist, Herr Prof. Dr. HEINRICH (Dresden) ähnliche Untersuchungen durchgeführt.

GERHARD GEISE, Dresden

*Zusatz bei der Korrektur:* Herr Prof. Dr. HEINRICH (Dresden) vermittelte freundlicherweise dem Verfasser einen Hinweis von Herrn Prof. Dr. WUNDERLICH (Wien), dem zu entnehmen ist, daß in der Arbeit von J. H. CADWELL, A property of linear cyclic transformations, Math. Gaz. 37, 85–89 (1953) (Referat: Zentralblatt 57, 117 (1954)) eine andere Verallgemeinerung der Aufgabe 379 für den Raum vorliegt.

## Ausfüllung von Eilinen durch einbeschriebene gleichseitige und gleichwinklige $n$ -Ecke

Einer Eilinie<sup>1)</sup> werde, ausgehend von einem festen Eilinenpunkt  $P$ , ein konvexer Sehnenzug mit (hinreichend kleinen) gleichlangen Sehnen  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$  einbeschrieben, so dass er durch die Sehne  $s_n$ , die seinen Endpunkt mit  $P$  verbindet, zu einem konvexen Sehnenzug geschlossen wird (Figur 1). Ist dabei  $s_{n-1} \neq s_n$ , so lässt sich durch stetige Vergrößerung der gleichlangen Sehnen  $s_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) im Falle  $s_{n-1} < s_n$  bzw. Verkleinerung im Falle  $s_{n-1} > s_n$  zu jedem Eilinenpunkt  $P$  ein der Eilinie einbeschriebenes gleichseitiges  $n$ -Eck finden.

<sup>1)</sup> Eine Eilinie sei eine ebene, geschlossene, konvexe und stückweise stetig differenzierbare Kurve.