Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **16 (1961)**

Heft 1

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Ungelöste Probleme

Nachtrag zu Nr. 14 (El. Math. *11*, 134 (1956)).

Herrn W. SIERPIŃSKI (Warschau) verdanken wir die folgenden Angaben:

Die von W. MNICH gestellte Frage, ob Summe und Produkt von drei rationalen Zahlen gleichzeitig 1 sein können, ist von J. W. S. CASSELS in seiner Arbeit: *On a diophantine equation* (Acta Arithmetica *6*, 47–52 (1960)) in negativem Sinn beantwortet worden. Leider ist der Casselsche Beweis nicht elementar und stützt sich auf Resultate verschiedener anderer Autoren. CASSELS hat bewiesen, dass das Problem von MNICH äquivalent ist mit der Frage, ob die diophantische Gleichung

$$y^2 = x^3 + (x + 4)^3$$

ausser $x = 0$, $y = 8$ weitere Lösungen in *rationalen* Zahlen besitzt. A. SCHINZEL konnte auf elementarem Wege zeigen, dass diese Gleichung auf jeden Fall keine weiteren Lösungen in *ganzen* Zahlen hat. E. TROST

Kleine Mitteilung

Simplexungleichungen

Die Ecktransversalen durch einen beliebigen inneren Punkt P des n-dimensionalen Simplex A_i $(i = 1, \dots, n + 1)$ schneiden die entsprechenden gegenüberliegenden Grenzräume in B_i $(i = 1, \dots, n + 1)$. Bezeichnen wir mit t_i $(i = 1, \dots, n + 1)$ die Strecke $\overline{A_i B_i}$, mit d_i $(i = 1, \dots, n+1)$ die Strecke $\overline{PB_i}$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{d_i}{t_i} = 1 . \tag{1}$$

Beweis: Sind $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ die baryzentrischen Koordinaten von P bezüglich der entsprechenden Simplexspitzen, so gilt

$$\frac{d_i}{t_i} = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n+1} x_i} ,$$

woraus (1) unmittelbar folgt.

Bezeichnen wir weiterhin mit r_i $(i = 1, \dots, n + 1)$ den Abstand des dem A_i Simplexspitze gegenüberliegenden Grenzraumes von P, mit h_i $(i = 1, \dots, n + 1)$ die zu A_i angehörigen Simplexhöhen, so ist einfach einzusehen, dass

$$\frac{r_i}{h_i} = \frac{d_i}{t_i} ,$$

woraus mit Rücksicht auf (1)

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{r_i}{h_i} = 1 \tag{2}$$

unmittelbar folgt.

Fällt P mit dem Inhyperkugelmittelpunkt des Simplex zusammen, so wird

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_{n+1} = \varrho ,$$

wo ϱ den Inhyperkugelradius bezeichnet. Für diesen Fall folgt aus (2):

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{h_i} = \frac{1}{\varrho} , \quad \text{woraus} \quad \frac{n + 1}{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{h_i}} = (n + 1)\, \varrho .$$

Die linke Seite ist aber gleich dem harmonischen Mittel der Simplexhöhen $H(h_i)$, also

$$(n + 1) \cdot \varrho = H(h_i) . \tag{3}$$