§3. Traces des algèbres de Hecke

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

PROPOSITION 2-4. *L'algèbre H_n est un k-module libre de base S_n.*

Démonstration. Soit $p \leqslant n$ un entier strictement positif. Notons, pour tout i compris entre 1 et p (au sens large), τ_i l'élément $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2} \dots \sigma_i$. Il est facile de vérifier les formules suivantes:

$$\forall i \leqslant p, \forall j < p, \tau_i \sigma_j = \begin{cases} \sigma_j \tau_i & \text{si} \quad j < i-1 \\ \tau_j & \text{si} \quad j = i-1 \\ \alpha\tau_i - \beta\tau_{i-1} & \text{si} \quad j = i \\ \sigma_{j-1}\tau_i & \text{si} \quad j > i\,. \end{cases}$$

Il en résulte que le sous-module de H_n engendré par S_n est stable par multiplication à droite par tous les générateurs σ_i de H_n, ce qui prouve que H_n est engendré linéairement par S_n.

Soit maintenant φ l'application de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, de support $\{1, 2, ..., n\}$ et qui vaut 1 sur son support. Le K-module $M(\varphi)$ est alors isomorphe à l'anneau du groupe symétrique $K[\mathfrak{S}_n]$. Soit f_0 l'inclusion de $\{1, ..., n\}$ dans $\mathbf{Z}$. La multiplication à droite par f_0 induit une application K-linéaire γ de $H_n \otimes K$ dans $M(\varphi)$. Si l'on tensorise ces modules par $\mathbf{Z}$ au-dessus de K, via le morphisme de K dans $\mathbf{Z}$ qui envoie λ et μ en 1 et -1, $H_n \otimes \mathbf{Z}$ devient $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$ ainsi que $M(\varphi)$ et γ devient l'identité. On en déduit que $\gamma(S_n)$ est une base de $M(\varphi) \otimes \mathbf{Z}$ et un système libre de $M(\varphi)$. Ce qui prouve que S_n est une base de H_n.

COROLLAIRE 2-5. *Pour tout entier $n > 0$, H_n est un H_{n-1}-module à gauche libre de base $\Sigma_n = \{1, \sigma_{n-1}, ..., \sigma_{n-1}\sigma_{n-2} \dots \sigma_1\}$.*

COROLLAIRE 2-6. *Pour tout $n > 0$, H_{n+1} est un H_n-bimodule isomorphe à $H_n \oplus H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n$.*

Démonstration. L'isomorphisme provient de la stabilisation i de H_n dans H_{n+1} et de l'application de $H_n \times H_n$ dans H_{n+1} qui à (u, v) associe $i(u)\sigma_n i(v)$. L'application qui s'en déduit respecte les bases (pour la structure le H_n-module à gauche). C'est donc un isomorphisme.

§ 3. TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE

Soit $n > 0$ un entier. Via la stabilisation i de H_n dans H_{n+1}, H_{n+1} est un H_n-bimodule. On peut donc considérer le module $E_n = H_0(H_n, H_{n+1})$, quotient de H_{n+1} par le sous-module engendré par les éléments de la forme:

$$ax - xa\,, \quad a \in i(H_n)\,, \quad x \in H_{n+1}\,.$$

Comme précédemment, le produit $\times$ induit un produit associatif de $\Lambda_p \otimes E_q$ dans E_{p+q} et E est un Λ-module gradué.

PROPOSITION 3-1. *L'application qui, à tout élément* $x \in H_n$, *associe l'élément* $(x \times 1_1)\sigma_n$ *de* H_{n+1}, 1 *étant l'unité de* H_1, *induit pour tout* $n > 0$ *une application de* E_{n-1} *dans* E_n. *Cette application sera notée* θ.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\sigma_n \in H_{n+1}$ commute avec tout élément stabilisé d'un élément de H_{n-1}.

Notations 3-2. On désignera par s_0 la classe de $1 \in H_1$ et, pour tout $n > 0$, on posera

$$s_n = \theta(s_{n-1})\,.$$

L'application quotient de E_n dans Λ_{n+1} sera notée f; f est une forme Λ-linéaire surjective, et l'on a: $\forall n \geqslant 0$, $f(s_n) = c_{n+1}$.

PROPOSITION 3-3. E *est un* Λ*-module libre de base* $\{s_0, s_1, s_2 \ldots\}$.

Démonstration. D'après le corollaire 2-6, on a

$$E_n = \Lambda_n \oplus H_0(H_n, H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n)\,.$$

Il n'est pas difficile de montrer que l'application de $H_n \otimes H_n$ dans H_n qui à $u \otimes v$ associe vu induit un isomorphisme de $H_0(H_n, H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n)$ sur $H_0(H_{n-1}, H_n) = E_{n-1}$. Ce qui montre que l'application de $\Lambda_n \oplus E_{n-1}$ dans E_n, qui à $u \oplus v$ associe $us_0 + \theta(v)$, est un isomorphisme.

On en déduit, par récurrence sur n, la formule

$$E_n = \Lambda_n s_0 \oplus \Lambda_{n-1} s_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_0 s_n\,,$$

ce qui montre le résultat cherché.

LEMME 3-4. *L'algèbre* Λ *est engendrée par les éléments* c_i, $i > 1$.

Démonstration. La formule

$$E_n = \Lambda_n s_0 \oplus \Lambda_{n-1} s_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_0 s_n$$

montre que Λ_{n+1} est engendré par les sous-modules $\Lambda_{n-i} c_{i+1}$, pour i variant de 0 à n. Comme ceci a lieu pour tout $n > 0$, on en déduit le résultat.

LEMME 3-5. *L'algèbre* Λ *est commutative.*

Démonstration. Soient σ et τ deux tresses. Comme les tresses $\sigma \times \tau$ et $\tau \times \sigma$ sont clairement conjuguées, les traces de σ et de τ commutent dans Λ. Comme de plus les classes c_i proviennent de tresses, Λ est commutatif.

Soit φ une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$ à support fini. Le module $M(\varphi)$ (voir § 2) est un module libre de dimension fini sur l'anneau $K = \mathbf{Z}[\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \mu^{-1}]$ et l'algèbre H_n (n étant égal au poids de φ) agit sur $M(\varphi)$. Pour tout élément u de H_n on notera $t_\varphi(u)$ la trace de l'endomorphisme de $M(\varphi)$ induit par la multiplication par u. Comme t_φ est linéaire et prend la même valeur en uv qu'en vu, t_φ induit une application linéaire T_φ de Λ_n dans K que l'on prolongera par 0 sur tous les modules Λ_p, $p \neq n$. Ainsi, l'application T_φ est une application k-linéaire de Λ dans K.

LEMME 3-6. *On a la formule:*

$$T_\varphi(c_n) = \lambda^{n-k}(\lambda+\mu)^{k-1}$$

k désignant le cardinal du support de φ.

Démonstration. Soit S le support de φ. C'est une partie de $\mathbf{Z}$ à k éléments. Par définition $M(\varphi)$ a une base $B(\varphi)$ formée des fonctions f de $X_n = \{1, 2, ..., n\}$ dans S telles que pour tout i de S, f prend la valeur i exactement $\varphi(i)$ fois. Si l'on munit $M(\varphi)$ d'un produit scalaire $< , >$ tel que $B(\varphi)$ soit une base orthonormée, on a

$$T_\varphi(c_n) = \sum_{f \in B(\varphi)} < f, s_1 s_2 \ldots s_{n-1}(f) > .$$

Soit f un élément de la base $B(\varphi)$. L'élément $s_{n-1}(f)$ est de la forme $af + bf \circ \varepsilon_{n-1}$, b étant supposé nul si f prend les mêmes valeurs en n et en $n-1$. Comme la valeur de $f \circ \varepsilon_{n-1}$ en n n'est pas modifiée après action des éléments s_i, $i < n-1$, on a

$$< f, s_1 s_2 \ldots s_{n-1}(f) > = a < f, s_1 s_2 \ldots s_{n-2}(f) > .$$

Si $f(n-1)$ est strictement inférieur à $f(n)$, a est nul. Sinon a est égal à λ ou $\lambda + \mu$ suivant que $f(n-1)$ est égal ou non à $f(n)$. En itérant ce raisonnement de proche en proche, on vérifie la formule

$$< f, s_1 s_2 \ldots s_{n-1}(f) > = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i < n \text{ tel que } f(i) < f(i+1) \\ \lambda^p(\lambda+\mu)^q & \text{sinon,} \end{cases}$$

p (resp. q) étant égal au nombre d'entiers non nuls $i < n$ tels que $f(i)$ et égal (resp. strictement supérieur) à $f(i+1)$.

Si la suite $f(1), ..., f(n)$ est décroissante, q est égal au cardinal de l'image de f diminué d'une unité, et p est égal à $n - 1 - q$. Comme de plus la base $B(\varphi)$ ne contient qu'une seule fonction décroissante, on vérifie aisément le lemme.

PROPOSITION 3-7. *Soit* φ *une fonction de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{N}$ *de poids* $n = p + q$. *Soient* u *et* v *deux éléments de* Λ_p *et* Λ_q. *Alors on a*

$$T_\varphi(uv) = \sum T_{\varphi'}(u) T_{\varphi - \varphi'}(v),$$

la sommation ayant lieu sur toutes les fonctions φ' *de poids* p, *comprises au sens large entre* 0 *et* φ.

Démonstration. Désignons par $H_p \times H_q$ l'image par l'application $\times$ de $H_p \otimes H_q$ dans H_n. Le module $M(\varphi)$ est isomorphe, en tant que $H_p \times H_q$-module à la somme directe des modules $M(\varphi') \otimes M(\varphi - \varphi')$, φ' appartenant à l'ensemble des fonctions de poids p et comprises entre 0 et φ. Soient x et y des représentants de u et v dans H_p et H_q. Comme la trace de $u \otimes v$ agissant sur $M(\varphi') \otimes M(\varphi - \varphi')$ est égal au produit de la trace de u agissant sur $M(\varphi')$ par la trace de v agissant sur $M(\varphi - \varphi')$, on obtient le résultat cherché.

COROLLAIRE 3-8. *Soit* φ *une fonction à support fini de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{N}$. *Soit* ε *une bijection de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{Z}$. *Alors les formes linéaires* T_φ *et* $T_{\varphi \circ \varepsilon}$ *sont égales.*

Démonstration. D'après le lemme 3-6 T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ prennent la même valeur sur les éléments c_n de Λ. D'après la proposition 3-7, si, pour tout φ, T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ prennent les mêmes valeurs en u et en v, elles prennent, pour tout φ, la même valeur en uv. On en déduit que T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ sont égales quel que soit φ.

Il en résulte que T_φ ne dépend que de la partition du poids n de φ en les nombres $\varphi(p)$. Cette partition est caractérisée par la suite finie $p_1, p_2, ...; p_i$ désignant le nombre de fois où φ prend la valeur i. On notera alors T_φ sous la forme T_u, où u est le mot $c_1^{p_1} c_2^{p_2} ...$.

§ 4. LA TRACE T

Soit $x = (x_i)$ une famille de symboles. On désignera par $A(x)$ l'algèbre des séries en les x_i à coefficients dans $K = \mathbf{Z}[\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \mu^{-1}]$. Un élément de