2.3. Après Châtelet.

2.3. Après Châtelet.

On a vu plus haut les développements directs que constituèrent les articles de Weil (1955) et de Lang-Tate (1958). En 1956, Lang établit que pour un groupe algébrique connexe quelconque A défini sur un corps fini F, l'ensemble de cohomologie $H^1(G, A(\bar{F}))$ est trivial: tout espace principal homogène sous A est isomorphe à A, ce qui généralise l'approche de Châtelet du théorème de F. K. Schmidt. En 1957, un exposé fameux de Tate au séminaire Bourbaki, intitulé « *WC*-groups over $\mathfrak{p}$-adic fields », établit, pour k un corps $\mathfrak{p}$-adique et A une variété abélienne définie sur k, des théorèmes de dualité entre $A(k)$ et $H^1(G, A(\bar{k}))$ qui sont les analogues des théorèmes de Witt (1934) dans le cas réel.

La théorie des courbes de genre 1 a depuis connu de tels développements qu'il serait impossible de les évoquer ici. Mentionnons cependant les travaux de Selmer (1951-1956) et Cassels (1959-1966), et l'introduction du groupe de Tate-Shafarevitch

$$\mathrm{Sh}^1(k, E) = \mathrm{Ker}\,[WC(E) \to \Pi_v WC(E_v)]\,,$$

où v parcourt les places du corps de nombres k et où E_v est la courbe E considérée sur le complété k_v de k. Ce groupe mesure le défaut du principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous E. Sa finitude est conjecturée et vient seulement d'être établie pour certaines courbes (Rubin, 1986).

2.4. Points de torsion.

Châtelet a aussi consacré plusieurs articles ([1940*a*], [1940*b*], [1947*b*], [1950*a*]) aux « points exceptionnels » des cubiques planes. La tangente en un point rationnel P d'une cubique plane E recoupe E en un troisième point rationnel, on prend la tangente en ce nouveau point et l'on recommence: le point P est dit exceptionnel si après un nombre fini d'itérations on retrouve le point P. Dans le cas d'une cubique de Weierstrass, ceci revient à dire que le point P est un point de torsion du groupe $E(k)$. Lorsque k est un corps de nombres, ce groupe est fini. Pour $k = \mathbf{Q}$ et E sous forme de Weierstrass

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

avec a et b dans $\mathbf{Z}$, Nagell établit en 1935 que si $(x, y) \in E(\mathbf{Q})$ est un point exceptionnel, alors x et y sont dans $\mathbf{Z}$ et y est nul ou divise $4a^3 + 27b^2$, ce qui permet une détermination *effective* des points de torsion. Une méthode