2. Geodesics in US^2

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. Geodesics in US^2

If $(p(t), v(t))$ is a geodesic in the unit tangent bundle US^2, then by the discussion in the preceding section, there must be a geodesic $h(t)$ through the identity in $SO(3)$ such that

$$h(t)\,(p(0)) = p(t) \quad \text{and} \quad h(t)\,(v(0)) = v(t)\,.$$

But $h(t)$ must fix a line in three-space, and rotate the orthogonal two-plane at constant speed. Hence $p(t)$, if it moves at all, must travel along a great or small circle, and $v(t)$ must make a constant angle with this circle.

A concrete distance formula between points (p, v) and (q, w) in US^2 is easily obtained. Let δ denote the distance between p and q on S^2, with $0 \leqslant \delta \leqslant \pi$. If this distance is less than π, that is, if p and q are not antipodal, then parallel translate v along the smaller arc of the unique great circle between p and q, and let ε denote the angle at q between this parallel translate of v and the vector w, as shown in Figure 3. If $\delta = \pi$, set $\varepsilon = 0$. Finally, let d denote the distance between (p, v) and (q, w) in US^2. Then a straightforward calculation reveals the formula

$$\cos(d/2) = \cos(\delta/2)\cos(\varepsilon/2)\,,$$

which is just the Pythagorean formula on a round sphere of radius 2, as indicated in Figure 4. Indeed, we have

$$US^2 = SO(3)/SO(1) = SO(3)\,,$$

a round, real projective 3-space.

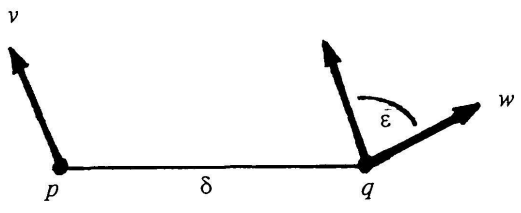


FIGURE 3

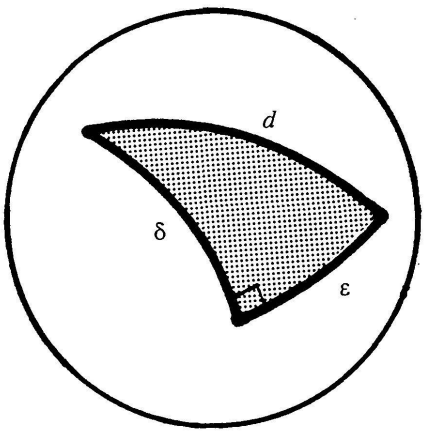


FIGURE 4