§7. Le théorème de Goldfeld

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Birch et Swinnerton-Dyer ont émis une autre conjecture, stupéfiante car elle relie la fonction L_E, définie à partir des nombres de solutions de l'équation (W) sur les corps finis, au rang r de $E(\mathbf{Q})$ qui fournit une information sur les solutions rationnelles de l'équation (W). Cette conjecture suppose implicitement la conjecture 1 satisfaite:

CONJECTURE 3 (Birch et Swinnerton-Dyer). *Le rang* r *de* $E(\mathbf{Q})$ *est égal à l'ordre du zéro de la fonction* L_E *au point* 1.

(Birch et Swinnerton-Dyer donnent en outre une expression conjecturale de $\lim_{s \to 1} (s-1)^r L_E(s)$.)

§ 7. LE THÉORÈME DE GOLDFELD

Un pas décisif vers la solution effective du problème du nombre de classes a été franchi par Goldfeld en 1976. L'idée à la base de son travail est la suivante: Supposons que nous connaissions une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ telle que pour tout caractère de Dirichlet $\chi : n \mapsto \left(\frac{-d}{n}\right)$ avec $-d$ discriminant fondamental, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}$ ait un comportement analytique très différent de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda(n) n^{-s}$ où λ est la fonction multiplicative introduite à la fin de II, § 2. On peut alors espérer d'après le principe de II, § 2, montrer de façon effective que lorsque d est grand, $h(-d)$ ne peut être petit.

De fait, Goldfeld montre [1]) qu'il suffit de *connaître une seule courbe elliptique* E définie sur $\mathbf{Q}$ telle que

— E soit une *courbe de Weil*;

— la fonction L_E ait un zéro *au moins triple* au point 1,

et d'appliquer l'idée précédente à la série de Dirichlet L_E pour obtenir des minorations effectives de nombres de classes. Celles-ci sont bien moins bonnes que celles que donne l'hypothèse de Riemann généralisée (cf. § 3):

[1]) D. M. GOLDFELD, *The conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and the class number of quadratic fields*, Journées Arithmétiques de Caen, Astérisque 41-42 (1977), 219-227.

on obtient par exemple [1]) pour $h(-d)$ *impair* une inégalité de la forme

$$h(-d) \geqslant c_E \log d \tag{34}$$

où c_E est une constante dépendant de la courbe elliptique E choisie, et susceptible d'être calculée. (Plus généralement, si $h(-d)$ est de la forme $2^t h'$ avec h' impair, on a une inégalité analogue à (34) à condition de remplacer c_E par une nouvelle constante $c_E(t)$ qui dépend de t, par exemple $c_E(t) = c_E e^{-3\sqrt{t}}$, et de supposer d premier à N_E; cette dernière condition peut même être omise si l'on choisit E convenablement comme l'ont remarqué Gross et Zagier.)

Comment trouver E *remplissant les deux conditions énoncées ci-dessus?* On commence par choisir une courbe elliptique E telle que le groupe $E(\mathbf{Q})$ ait un rang impair $r \geqslant 3$ (il y en a une infinité et on peut en expliciter à volonté). On vérifie qu'elle est de Weil (soit parce qu'elle est à multiplications complexes, soit par un calcul sur ordinateur) et que le signe ε_E de l'équation fonctionnelle de L_E est -1 (par le calcul). La fonction L_E a alors un zéro d'ordre ρ *impair* en 1, et si l'on croit en la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, ρ doit être égal à r, donc $\geqslant 3$. Malheureusement, cette conjecture n'est pas démontrée. Peut-on s'en passer et dans le cas particulier choisi, prouver directement l'inégalité $\rho \geqslant 3$? Puisque ρ est impair, cela revient à montrer que $L'_E(1) = 0$. Il est possible d'obtenir par calcul sur ordinateur des valeurs approchées de $L'_E(1)$, mais a priori même si celles-ci sont très petites on ne peut conclure à la nullité de $L'_E(1)$.

Il a fallu attendre 1983 et les travaux de Gross et Zagier pour arriver enfin à surmonter cette difficulté et à appliquer le théorème de Goldfeld.

§ 8. Le théorème de Gross et Zagier

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ et soit $P \in E(\mathbf{Q})$ un point rationnel de E. Ecrivons l'abscisse $x(n(P))$ du point $P + \dots + P$ (n termes, la somme étant calculée dans le groupe $E(\mathbf{Q})$) sous forme d'une fraction irréductible a_n/b_n. On montre que l'expression $\frac{1}{2} n^{-2} \log(\sup(|a_n|, |b_n|))$ a une limite $\hat{h}(P)$ lorsque P tend vers $+\infty$, appelée *hauteur de Néron-Tate de P.*

---

[1]) Cette inégalité, un peu meilleure que celle de Goldfeld, est prouvée par la même méthode dans mon exposé sur la question au Séminaire Bourbaki (Juin 1984, exposé 631).