

# Biegemomente in elastisch eingespannten Plattenstreifen unter Rechtecklasten in Feldmitte

Autor(en): **Schneider, Jörg**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **80 (1962)**

Heft 31

PDF erstellt am: **12.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-66200>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Biegemomente in elastisch eingespannten Plattenstreifen unter Rechtecklasten in Feldmitte

DK 624.073.12

Von **Jörg Schneider**, dipl. Ing., Assistent für Baustatik, Hoch- und Tiefbau an der ETH, Zürich

## A) Einleitung

Zur Ermittlung der Biegemomente an frei drehbar gelagerten sowie ein- oder beidseitig starr eingespannten Plattenstreifen unter beliebigen Lasten stehen verschiedene Hilfsmittel zur Verfügung (z. B. [1], [2]). Für elastisch eingespannte Plattenstreifen hingegen wird heute praktisch ausschliesslich nur mit groben Näherungen operiert, indem die unter den obengenannten Lagerungsarten ermittelten Feldmomente nach gewissen Gesichtspunkten vergrössert oder verkleinert werden. Hauptgrundlage für diese Schätzungen bildet der entsprechend den wirklich vorhandenen Randbedingungen gelagerte stellvertretende Balken. Im folgenden wird eine verfeinerte Näherungsberechnung beschrieben, die mit der Wirklichkeit sehr gut übereinstimmende Resultate ergibt. Es wird gezeigt, dass die Feldmomente des elastisch eingespannten Plattenstreifens durch sinnvolle Reduktion der entsprechenden Momente des frei aufliegenden Streifens erhalten werden können. Für diesen Fall, der hiermit an Bedeutung gewinnt, werden zwei Diagramme beigelegt, die die Ermittlung dieser Momente weitgehend vereinfachen. Die Einspannmomente lassen sich nicht so einfach erfassen, jedoch ist die Einspannung, zum Beispiel in den Hauptträgern massiver Brücken, für Einzellasten grösser, als man gemeinhin annimmt. Im übrigen fällt eine Ueberschätzung des Einspannmomentes bekannterweise wirtschaftlich kaum ins Gewicht.

## B) Der beidseitig frei aufliegende Plattenstreifen

Nach [3] kann die Biegefläche des entsprechend Bild 1 gelagerten Plattenstreifens in der Form einer Fourier-Reihe angeschrieben werden. Aus dieser Biegefläche lassen sich die Biegemomente in Feldmitte unter der Einzellast bestimmen. Man erhält das Folgende:

$$m_{x0} = P \cdot \eta_{mx0}$$

$$m_{y0} = P \cdot \eta_{my0}$$

worin  $\eta_{mx0}$  und  $\eta_{my0}$  die mittleren Einflussflächen-Ordinaten innerhalb der Lastaufstandsfläche sind.

Mit den Abkürzungen  $\beta_1 = b_1/l$ ,  $\beta_2 = b_2/l$  und der Querdehnungszahl  $\mu$  erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\eta_{mx0} = \sum_n \frac{2}{n^3 \cdot \pi^3} \cdot \frac{1}{\beta_2} \cdot \sin \frac{n\pi\beta_2}{2} \cdot \frac{1}{\beta_1} \left\{ 2 - \left[ 2 + \frac{n\pi\beta_1}{2} (1-\mu) \right] e^{-\frac{n\pi\beta_1}{2}} \right\}$$

$$\eta_{my0} = \sum_n \frac{2}{n^3 \cdot \pi^3} \cdot \frac{1}{\beta_2} \cdot \sin \frac{n\pi\beta_2}{2} \cdot \frac{1}{\beta_1} \left\{ 2\mu - \left[ 2\mu - \frac{n\pi\beta_1}{2} (1-\mu) \right] e^{-\frac{n\pi\beta_1}{2}} \right\}$$

mit  $n = 1, 3, 5 \dots$

Die Grösse dieser mittleren Einflussflächen-Ordinaten wird in den nebenstehenden Diagrammen in Abhängigkeit von  $\beta_1$  und  $\beta_2$  dargestellt. Für die Berechnung wurde  $\mu = 1/6$  gesetzt (Beton). Mit diesen Werten kann in Zukunft die immerhin etwas langwierige Auswertung des ins  $\infty$  gehenden Schlauches der Einflussfelder im Aufpunkt umgangen werden.

Der Einfluss der ausserhalb des Aufpunktes stehenden Lasten kann mit Hilfe der bekannten Einflussfelder leicht ermittelt werden. Dieser Einfluss ist jedoch im allgemeinen klein.

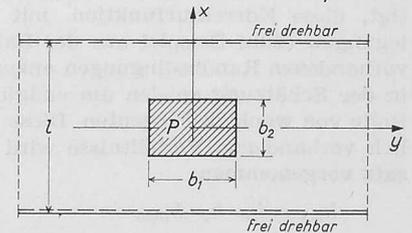
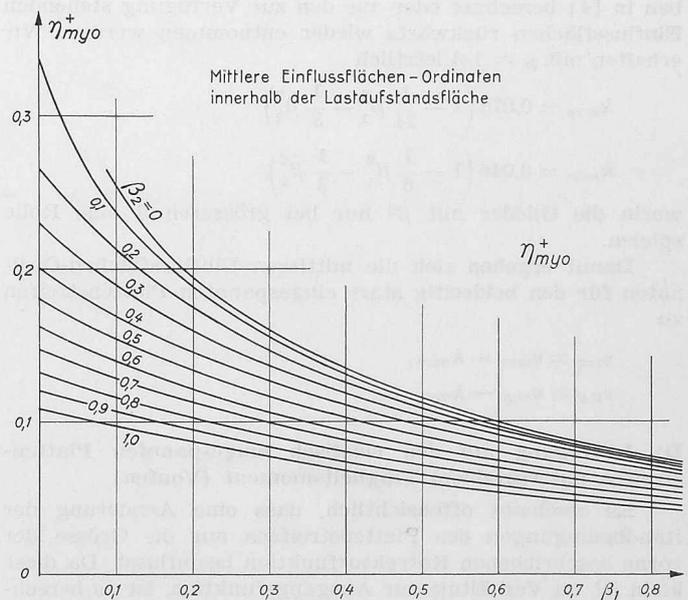
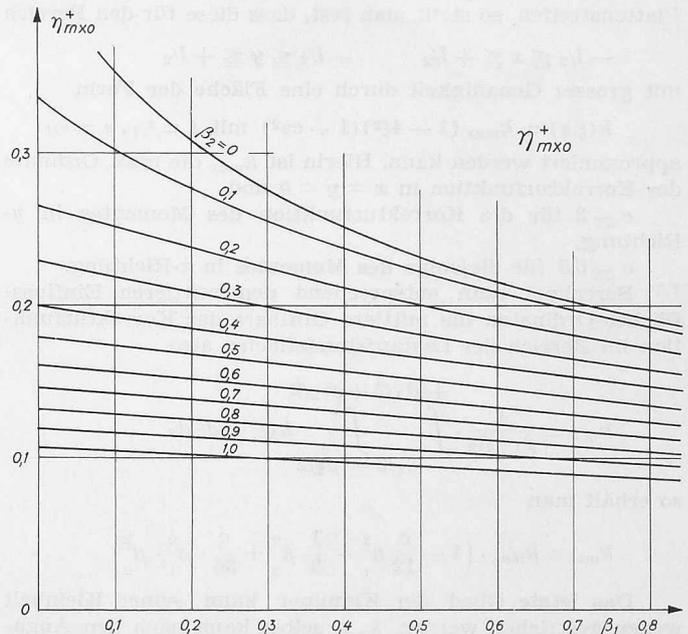


Bild 1. Ausgangssystem

## C) Der beidseitig starr eingespannte Plattenstreifen

Das Einflussfeld für den beidseitig starr eingespannten Plattenstreifen kann nach [4] erhalten werden aus dem Einflussfeld des frei aufliegenden Plattenstreifens, indem man diesem eine reguläre Korrekturfunktion überlagert, derart, dass die Randverdrehungen längs der beiden Ränder zum Verschwinden gebracht werden. Das Vorgehen ist also das gleiche wie in der Stabstatik, wo man die Einflusslinie des eingespannten Balkens erhält, indem man derjenigen des frei aufliegenden Balkens eine Biegelinie überlagert, welche nur durch Randbelastungen hervorgerufen wird, und welche die

Randverdrehungen eliminiert. Beim Plattenstreifen ist diese Korrekturfunktion eine durch Randmomente hervorgerufene Biegefläche mit durch die Einflussfläche des frei aufliegenden Plattenstreifens vorgegebenen Randverdrehungen.

Interessiert man sich für die Grösse dieser Korrekturfunktion, zum Beispiel für den beidseitig starr eingespannten Plattenstreifen, so stellt man fest, dass diese für den Bereich

$$-l/2 \leq x \leq +l/2 \quad -l/2 \leq y \leq +l/2$$

mit grosser Genauigkeit durch eine Fläche der Form

$$k(\xi, \eta) = k_{max} (1 - 4\xi^2)(1 - c\eta^2) \text{ mit } \xi = x/l, \eta = y/l$$

approximiert werden kann. Hierin ist  $k_{max}$  die max. Ordinate der Korrekturfunktion in  $x = y = 0$  und

$c \cong 2$  für die Korrekturfunktion des Momentes in  $y$ -Richtung,

$c \cong 0,5$  für diejenige des Momentes in  $x$ -Richtung.

Berechnet man entsprechend den mittleren Einflussflächen-Ordinaten die mittlere Ordinate der Korrekturfunktion im Bereich der Lastaufstandsfläche, also

$$k_{mo} = \frac{1}{\beta_1 \cdot \beta_2} \cdot \int_{-\beta_1/2}^{+\beta_1/2} \int_{-\beta_2/2}^{+\beta_2/2} k(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

so erhält man

$$k_{mo} = k_{max} \cdot \left( 1 - \frac{c}{12} \beta_1^2 - \frac{1}{3} \beta_2^2 + \frac{c}{36} \cdot \beta_1^2 \cdot \beta_2^2 \right)$$

Das letzte Glied der Klammer kann seiner Kleinheit wegen gestrichen werden.  $k_{max}$  selbst kann nach den Angaben in [4] berechnet oder aus den zur Verfügung stehenden Einflussflächen rückwärts wieder entnommen werden. Wir erhalten mit  $\mu = 1/6$  letztlich

$$k_{m_{x0}} = 0,070 \left( 1 - \frac{1}{24} \beta_1^2 - \frac{1}{3} \beta_2^2 \right)$$

$$k_{m_{y0}} = 0,046 \left( 1 - \frac{1}{6} \beta_1^2 - \frac{1}{3} \beta_2^2 \right)$$

worin die Glieder mit  $\beta^2$  nur bei grösseren  $\beta$  eine Rolle spielen.

Damit ergeben sich die mittleren Einflussflächen-Ordinaten für den beidseitig starr eingespannten Plattenstreifen zu

$$\eta_{mx} = \eta_{m_{x0}} - k_{m_{x0}}$$

$$\eta_{my} = \eta_{m_{y0}} - k_{m_{y0}}$$

#### D) Uebergang auf den elastisch eingespannten Plattenstreifen mit variablem Trägheitsmoment (Vouten)

Es erscheint offensichtlich, dass eine Aenderung der Randbedingungen des Plattenstreifens nur die Grösse der vorne beschriebenen Korrekturfunktion beeinflusst. Da diese klein ist im Verhältnis zur Ausgangsfunktion, ist es berechtigt, diese Korrekturfunktion mit relativ groben Ueberlegungen (zum Beispiel aus der Balkenstatik) den wirklich vorhandenen Randbedingungen anzupassen. Ungenauigkeiten in der Schätzung spielen am endgültigen Resultat nur eine Rolle von wenigen Prozenten. Diese Anpassung an die wirklich vorhandenen Verhältnisse wird mit dem folgenden Ansatz vorgenommen:

$$k_{mx} = k_e \cdot k_v \cdot k_{m_{x0}}$$

$$k_{my} = k_e \cdot k_v \cdot k_{m_{y0}}$$

Die beiden Koeffizienten erfassen den Einspanngrad des Plattenstreifens sowie dessen veränderliches Trägheitsmoment. Ueber die Grösse dieser Koeffizienten wird nachfolgend berichtet. Wir erhalten dann endlich für einen beliebig gelagerten Plattenstreifen die mittleren Einflussflächen-Ordinaten unter der Lastaufstandsfläche zu

$$\eta_{mx} = \eta_{m_{x0}} - k_{mx}$$

$$\eta_{my} = \eta_{m_{y0}} - k_{my}$$

Mit dem Faktor  $k_e$  soll der Einspannungsgrad des Plattenstreifens erfasst werden. Setzt man den Grad der Einspannung proportional zum zugehörigen Festpunktabstand

an, so erhält man den folgenden Ausdruck:

$$k_e = \frac{a_{vorh}}{a_{max}} \cong \frac{1}{1 + \frac{2EJ}{l} \Theta}$$

mit  $l$  = Spannweite des Plattenstreifens

$J$  = dessen Trägheitsmoment in Plattenmitte

$\Theta$  = Drehwinkel der an den Plattenstreifen anschliessenden Konstruktion, z. B. Längsträger und anschliessendes Plattenfeld unter  $m = 1$  mt/m.

$k_e$  liegt zwischen 0 und 1 ist damit auf die Form gebracht, bei der wie üblich z. B. von einer halben Einspannung ( $k_e = 0,5$ ) gesprochen werden kann. Bei der Berechnung von  $k_e$  kann der Einfluss der Hauptträger berücksichtigt werden. Für im Verhältnis zur Hauptträgerhöhe  $H$  grosse Querträgerabstände  $L$  kann mit guter Annäherung der Hauptträgerdrehwinkel zwischen den Querträgern aus dem Torsionseinfluss allein bestimmt werden, wie dies z. B. in [5] vorgeschlagen wird. Für Verhältnisse  $L/H < \sim 4$  ergibt dies jedoch zu günstige Werte. Hier spielt die Krümmung der Hauptträger in vertikaler Richtung eine massgebende Rolle. Eigentlich hat man es hier mit einer dreiseitig gelagerten Platte zu tun, bei welcher der Drehwinkel in der Mitte des oberen horizontal gestützten Randes infolge 1 mt/m gesucht ist. Dieses Problem ist in [3] für über die Länge  $L$  sin'förmig verteilten Momentenangriff und konstante Plattenstärke (also hier über die Höhe  $H$  des Hauptträgers konstante Breite  $b_0$ ) gelöst. Es ergibt sich der Ausdruck

$$\varepsilon_T = \frac{L}{Eb_0^3} \cdot \frac{6(1-\mu^2)}{\pi} \cdot \frac{3 \operatorname{Cosh}^2 \frac{\pi}{m} + \frac{\pi^2}{m^2} + 1}{3 \operatorname{Sinh} \frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{Cosh} \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{m}}$$

$$\text{mit } m = \frac{L}{H}$$

welchen man mit fast mathematischer Genauigkeit einfacher schreiben kann als

$$\varepsilon_T = \frac{L}{Eb_0^3} \cdot \frac{6(1-\mu^2)}{\pi} \cdot \sqrt{1 + \frac{m^2}{\pi^2}}$$

Hiermit und mit  $\varepsilon_a$  Drehwinkel des Nachbarfeldes unter  $m = 1$  mt/m ergibt sich  $\Theta$  nach bekannten Regeln aus

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1}{\varepsilon_a} + \frac{1}{\varepsilon_T}$$

Falls  $k_e$  an den beiden Plattenstreifen-Rändern verschieden gross ist, kann das Mittel als massgebender Faktor angesehen werden. Dies ergibt auch im Grenzfall des einseitig starr eingespannten, auf der anderen Seite frei aufliegenden Plattenstreifens Ergebnisse, die auf der sicheren Seite liegen.

Mit dem Koeffizienten  $k_v$  soll der Einfluss der bei Fahrbahnplatten im allgemeinen angeordneten Vouten erfasst werden. Für die Ermittlung der Einflussflächen des frei aufliegenden Plattenstreifens spielen diese Verstärkungen am Rande eine vernachlässigbare Rolle (beim entsprechenden Balken ist der Einfluss = 0), so dass die  $\eta_{m_{x0}}$  und  $\eta_{m_{y0}}$  unverändert übernommen werden dürfen. Dagegen wird die Korrekturfunktion durch diese Verstärkungen beeinflusst (wie man bei der Verfolgung der Verhältnisse am eingespannten Balken merkt), und zwar wird sie vergrössert,  $k_v$  ergibt sich als Quotient der Durchbiegung des randverstärkten Balkens zu derjenigen des Balkens mit konstanter Höhe  $d_0$  bei in beiden Fällen gleicher, vorgegebener Randverdrehung. Dieser Quotient  $k_v$  ist leicht mit Hilfe der Mohrschen Sätze abzuleiten. Für gerade Vouten nach Bild 2 erhält man den folgenden Ausdruck:

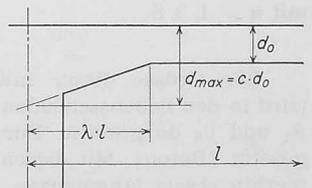


Bild 2. Voutenform

$$k_v = \frac{1 - \left[ \frac{1}{12} - \frac{2}{3(c+1)^3} \right] \cdot \lambda^2}{1 - \left[ \frac{5}{3} - \frac{1}{3c^3} - \frac{32}{3(c+1)^3} \right] \cdot \lambda}$$

Mit guter Approximation kann man hierfür im Bereich

$$1,5 \leq c \leq 2,3$$

schreiben

$$k_v = \left[ 1 + \frac{0,6 \cdot c \cdot \lambda}{1 - 0,6 \cdot c \cdot \lambda} \right]$$

### E) Beispiel

Plattenspannweite  $l = 5,40$  m

Voutengrösse:

$$\lambda = \frac{1,00}{5,40} = 0,185 ; c = \frac{0,36}{0,16} = 2,25$$

$\theta = 0$  (Querschnitt direkt über von der Platte getrenntem Querträger)

$b_1 = b_2 = 0,54$  m  $\rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0,10$   
aus Diagramm

$$\eta_{m,0} = 0,305$$

$$k_{m,0} = 0,070 \left( 1 - \frac{0,01}{24} - \frac{0,01}{3} \right) \cong 0,070$$

$$k_e = 1$$

$$k_v = 1 + \frac{0,6 \cdot 2,25 \cdot 0,185}{1 - 0,6 \cdot 2,25 \cdot 0,185} = 1,333$$

Damit letztlich

$$\eta_{m,x} = 0,305 - 1 \cdot 1,333 \cdot 0,070 = 0,212$$

### F) Zusammenfassung und Literaturangaben

Es wird gezeigt, dass die Feldmomente an elastisch eingespannten Plattenstreifen mit Auflagerverstärkungen unter Rechtecklasten sich durch Reduktion der entsprechenden Momente des frei aufliegenden Plattenstreifens erhalten lassen. Für diesen Fall werden zur Vereinfachung der Rechnung zwei Diagramme beigelegt. Weiter wird gezeigt, wie sich der Einspannungsgrad der Plattenstreifen in den Hauptträgern massiver Brücken mit genügender Sicherheit auch für im Verhältnis zur Hauptträgerhöhe kleine Querträgerabstände abschätzen lässt.

- [1] Pucher, Einflussfelder elastischer Platten.
- [2] Olsen-Reinitzhuber, Die zweiseitig gelagerte Platte.
- [3] Girkmann, Flächentragwerke.
- [4] Pucher, Die Einflussfelder des Plattenstreifens mit zwei eingespannten Rändern. Federhofer-Girkmann-Festschrift, Wien 1950.
- [5] Lardy †, Beiträge zu ausgewählten Problemen des Massivbaues, und zwar der Abschnitt Mathys, Die generelle Berechnung von Fahrbahnplatten für Radlasten.

Adresse des Verfassers: Jörg Schneider, dipl. Ing., Wilstr. 88, Dübendorf ZH.

## Verkehrspolitische Fragen in der Bundesrepublik Deutschland

DK 656

Von Dr.-Ing. Hans Christoph Seebohm, Deutscher Bundesminister für Verkehr, Bonn

Vortrag, gehalten am 30. März 1962 im Zürcher Ingenieur- und Architektenverein

Schluss von Seite 527

### III.

Lassen Sie mich anschliessend kurz einige Probleme des deutschen Seeverkehrs und der Luftfahrt streifen. Hier hat sich, wie ich eingangs bereits andeutete, eine besonders bemerkenswerte Entwicklung vollzogen.

Im Herbst 1949, nach der Konstituierung der Bundesrepublik, umfasste die deutsche Seetonnage durch Wiederinstandsetzung beschädigter und versenkter Schiffe nur 270 000 BRT. Heute hat die deutsche Handelsflotte bereits den Vorkriegsstand überschritten und verfügt mit 2680 Schiffen und insgesamt 5,02 Mio BRT wieder über einen modernen und leistungsfähigen Handelsschiffraum. Der Wiederaufbau kann im wesentlichen als abgeschlossen angesehen werden.

Die deutsche Handelsflotte ist aber nicht in der Lage, sich aus eigener Kraft gegen die zunehmenden Diskriminierungspraktiken weiter Teile des Auslandes, besonders gegen den sich ausweitenden Flaggenprotektionismus in der Welt genügend durchzusetzen. Die alte Freiheit der Meere wird durch Reglementierungen aller Art bedroht. Daher muss die Bundesregierung darum bemüht sein, die Freizügigkeit der deutschen Seeschifffahrt durch geeignete Wettbewerbsmassnahmen und durch Abwehr der Diskriminierung zu erhalten.

Die Entwicklung des deutschen Luftverkehrs ist in erster Linie durch den Uebergang vom Kolben- zum Düsenflugzeug gekennzeichnet, der schneller eingetreten ist, als man noch vor wenigen Jahren voraussehen konnte. Er hat uns, die wir erst seit 1955 wieder die Lufthoheit besitzen, besonders hart getroffen. Wegen dieses beschleunigten Uebergangs zum Jet-Flugzeug ist der Aufbau der Deutschen Lufthansa noch nicht abgeschlossen. Sie hat zwar ihre Leistungen sowohl im Personenverkehr als auch in der Fracht- und Postbeförderung sehr erheblich gesteigert. Sie hat aber noch mit Schwierigkeiten zu kämpfen, die zum Teil auf die notwendigen Sonderabschreibungen für die noch mit einem Buchwert bilanzierten Kolbenflugzeuge, vor allem jedoch auf die gegenwärtige Krise des Weltluftverkehrs zurückzuführen sind. Diese Krise ist durch die politischen Schwierigkeiten in Europa

und ein Missverhältnis zwischen Angebot und Nachfrage verursacht worden.

Im Jahre 1961 erreichte die Auslieferung von Düsenflugzeugen ihren bisherigen Höhepunkt. Das Angebot im Weltluftverkehr hat sich dadurch gegenüber 1960 um 24 % erhöht, die Nachfrage hingegen infolge der starken weltpolitischen Spannungen um nur 7 %. In dieser Krise hat sich die Deutsche Lufthansa im internationalen Vergleich noch verhältnismässig gut gehalten.

Angesichts dieser Schwierigkeiten kann die dringend gebotene Rationalisierung des Betriebes am zweckmässigsten durch eine Zusammenfassung der Kräfte mehrerer Gesellschaften erreicht werden. Daher verhandeln die Luftfahrtgesellschaften der Bundesrepublik Deutschland, Frankreichs, Italiens und Belgiens über die Bildung einer Air-Union, der sich wahrscheinlich auch die der Niederlande anschliessen wird. Sie wird kein Zusammenschluss sein, der andere ausschliesst. Jedes Land, auch ausserhalb Europas, kann beitreten.

Das revolutionäre Tempo des technischen Fortschritts wirkt sich auch auf zwei weitere Gebiete aus, nämlich auf die Flughäfen und die Flugsicherung.

Als die deutschen Flughäfen ihre Anlagen und Einrichtungen unter Beachtung der internationalen Normen ausgebaut hatten und eine gewisse Konsolidierung auf dem erreichten Leistungsstand erwartet werden konnte, traten an sie mit der Aufnahme des zivilen Düsenluftverkehrs neue technische und betriebliche Anforderungen heran. Von besonderer Tragweite für die Flughäfen waren die wesentlich erhöhten Ansprüche der neuen Flugzeuge an die Länge der Start- und Landebahnen. Demzufolge mussten die Vorfelder erweitert, die Hallen vergrössert und die Vorfeldgeräte den Ausmassen und sonstigen Eigenschaften der Düsenflugzeuge angepasst werden. Insgesamt hat die öffentliche Hand während der Jahre 1949 bis 1961 in die Verkehrsflughäfen rd. 350 Mio DM investiert, von denen auf den Bund, der an sechs deutschen Verkehrsflughäfen beteiligt ist, rd. 57 Mio DM entfielen. Beim Ausbau — auch für späteren Ueberschallverkehr — kommen Berlin, Kaltenkirchen bei Hamburg, Köln-Bonn, Frankfurt und