2.4. Points de torsion.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

2.3. Après Châtelet.

On a vu plus haut les développements directs que constituèrent les articles de Weil (1955) et de Lang-Tate (1958). En 1956, Lang établit que pour un groupe algébrique connexe quelconque A défini sur un corps fini F, l'ensemble de cohomologie $H^1(G, A(\bar{F}))$ est trivial: tout espace principal homogène sous A est isomorphe à A, ce qui généralise l'approche de Châtelet du théorème de F. K. Schmidt. En 1957, un exposé fameux de Tate au séminaire Bourbaki, intitulé « *WC*-groups over $\mathfrak{p}$-adic fields », établit, pour k un corps $\mathfrak{p}$-adique et A une variété abélienne définie sur k, des théorèmes de dualité entre $A(k)$ et $H^1(G, A(\bar{k}))$ qui sont les analogues des théorèmes de Witt (1934) dans le cas réel.

La théorie des courbes de genre 1 a depuis connu de tels développements qu'il serait impossible de les évoquer ici. Mentionnons cependant les travaux de Selmer (1951-1956) et Cassels (1959-1966), et l'introduction du groupe de Tate-Shafarevitch

$$\mathrm{Sh}^1(k, E) = \mathrm{Ker}\,[WC(E) \rightarrow \Pi_v WC(E_v)]\,,$$

où v parcourt les places du corps de nombres k et où E_v est la courbe E considérée sur le complété k_v de k. Ce groupe mesure le défaut du principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous E. Sa finitude est conjecturée et vient seulement d'être établie pour certaines courbes (Rubin, 1986).

2.4. Points de torsion.

Châtelet a aussi consacré plusieurs articles ([1940*a*], [1940*b*], [1947*b*], [1950*a*]) aux « points exceptionnels » des cubiques planes. La tangente en un point rationnel P d'une cubique plane E recoupe E en un troisième point rationnel, on prend la tangente en ce nouveau point et l'on recommence: le point P est dit exceptionnel si après un nombre fini d'itérations on retrouve le point P. Dans le cas d'une cubique de Weierstrass, ceci revient à dire que le point P est un point de torsion du groupe $E(k)$. Lorsque k est un corps de nombres, ce groupe est fini. Pour $k = \mathbf{Q}$ et E sous forme de Weierstrass

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

avec a et b dans $\mathbf{Z}$, Nagell établit en 1935 que si $(x, y) \in E(\mathbf{Q})$ est un point exceptionnel, alors x et y sont dans $\mathbf{Z}$ et y est nul ou divise $4a^3 + 27b^2$, ce qui permet une détermination *effective* des points de torsion. Une méthode générale fut développée par E. Lutz (1937) et A. Weil (1936), qui étudièrent la structure du groupe topologique $E(k)$ lorsque k est un corps p-adique (ce qu'on peut transcrire aujourd'hui au moyen des groupes formels et des modèles de Néron). Châtelet attira l'attention sur le fait que la méthode d'E. Lutz permet la détermination effective des points exceptionnels lorsque le corps de base k est un corps de nombres quelconque. Dans une note de 1940, Châtelet observe que les résultats de Lutz permettent de borner uniformément la torsion des courbes elliptiques définies sur un corps de nombres k et d'invariant j fixé (il suffit de se placer sur une complétion p-adique de k; à k-isomorphisme près, il n'y a alors qu'un nombre fini de courbes elliptiques d'invariant j donné, et pour chacune d'elles le groupe de torsion est fini). C'est un problème ouvert de savoir si la condition sur j peut être omise (dans le cas $k = \mathbf{Q}$, c'est un théorème de Mazur que l'ordre du groupe de torsion est au plus 16).

3. Surfaces cubiques

C'est la partie de l'œuvre de Châtelet qui a joué un grand rôle dans mes recherches personnelles.

Sauf mention du contraire, les surfaces cubiques ici considérées sont supposées absolument irréductibles et non coniques. Le corps de base k est pris de caractéristique zéro.

3.1. Avant Châtelet.

De 1940 à 1944, Mordell et B. Segre s'intéressent aux surfaces cubiques. Ils montrent que si une telle surface X définie sur k possède un point rationnel non singulier, alors il existe une application rationnelle dominante définie sur k d'un plan projectif sur X. En particulier les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski. B. Segre montre en 1944 qu'une surface cubique singulière X qui possède un point rationnel non singulier est k-rationnelle (k-birationnelle au plan projectif) sauf si X possède exactement deux points singuliers conjugués. En 1951, ce même Segre étudie les surfaces cubiques non singulières. On dit qu'une telle surface contient un S_n si elle contient un ensemble globalement défini sur k de n droites gauches deux à deux. Segre montre que si X est k-rationnelle, alors X contient nécessairement un S_1, un S_2, un S_3 ou un S_6 (comme le montrèrent indépendamment en 1970 Swinnerton-Dyer et Iskovskih, X contient en fait un S_2, un S_3 ou un S_6). En 1951, Segre donne aussi les premiers exemples