problème

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 255-268

UNE THÉORIE DE DENJOY DES MARTINGALES DYADIQUES

par Jean-Pierre KAHANE

En 1912, dans deux notes aux *Comptes-Rendus*, Arnaud Denjoy créait la *totalisation* comme procédé permettant de calculer la primitive de toute fonction dérivée. Ce procédé mariait trois théories: les ordinaux de Cantor, l'intégration de Lebesgue, la topologie de Baire. Modifié, il allait permettre à Denjoy la résolution d'un autre problème, inspiré par Riemann et Cantor, le calcul des coefficients d'une série trigonométrique partout convergente à partir de sa somme. L'exposé des totalisations de Denjoy est réputé difficile. Lui-même y a consacré d'importants articles et de gros ouvrages. Mon but est de donner un exposé complet d'une totalisation simplifiée, permettant le calcul des primitives, dans le cadre qui me paraît le mieux adapté: celui des martingales dyadiques partout convergentes ou, de manière équivalente, celui des dérivées dyadiques. J'exposerai le problème, puis la solution. Quelques commentaires suivront. Dans un appendice je caractériserai la distribution des dérivées dyadiques, et je terminerai par quelques citations et un pastiche.

LE PROBLÈME

Posons $X = \{0, 1\}^{\mathbf{N}^+}$. Un élément x de X est une suite $(x_1, x_2, ...)$ à valeurs 0 ou 1. Une martingale dyadique est une suite de fonctions f_n définies sur X ($n \in \mathbf{N}$), à valeurs réelles, et vérifiant les conditions suivantes:

1. f_0 est une constante et $f_n(x)$ ne dépend que de $x_1, x_2, ... x_n$; on écrira (abus véniel)

$$f_n(x) = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1}$$

2. Pour tout n et tout $(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{2}\left(f_{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, 0) + f_{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, 1)\right). \tag{2}$$

Nous considérons des martingales dyadiques partout convergentes, donc

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{3}$$

existe pour tout $x \in X$. Notre but est de calculer la valeur moyenne de la martingale (c'est la valeur moyenne de f_n, indépendante de n), soit

$$f_0 = \frac{1}{2}(f_1(0)+f_1(1)) = \mathscr{M}(f_n) = 2^{-n}\sum f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{4}$$

à partir de la fonction $f(x)$.

La situation peut encore se décrire ainsi. On considère sur l'intervalle fermé $I = [0, 1]$ une fonction réelle F. On pose

$$f_0 = F(1) - F(0)$$

et généralement

$$f_n(x_1, ..., x_n) = 2^n\left(F\left(\frac{x_1}{2} + ... + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) - F\left(\frac{x_1}{2} + ... + \frac{x_n}{2^n}\right)\right);$$

c'est la pente de la corde du graphe de F au-dessus de l'intervalle dyadique

$$\left[\frac{x_1}{2} + ... + \frac{x_n}{2^n}, \frac{x_1}{2} + ... + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right]$$

(c'est ce que nous appellerons une « corde dyadique »). Toute martingale dyadique peut s'obtenir de cette façon. Si la fonction F est partout dérivable, la martingale est partout convergente, avec pour limite

$$f(x) = F'\left(\sum_1^\infty x_j \cdot 2^{-j}\right). \tag{5}$$

Le calcul de f_0 à partir de f est bien une totalisation de la dérivée F' sur l'intervalle $[0, 1]$. Réciproquement, si la martingale est partout convergente, on peut dire que F est « dérivable au sens dyadique »; cela signifie, pour tout point $t \in [0, 1]$ non dyadique, que les pentes des cordes dyadiques au-dessus de t tendent vers une limite, la « dérivée dyadique », et qu'en tout point $t \in [0, 1]$ dyadique, les pentes des cordes dyadiques ayant leur extrémité droite resp. gauche au-dessus de t tendent vers une limite, la « dérivée dyadique gauche » resp. « droite ». En posant, quand t n'est pas dyadique

$$t = \sum_1^\infty x_j 2^{-j} \tag{6}$$

et, quand t est dyadique

$$t+0=\sum_{1}^{\infty} x_j \cdot 2^{-j} \qquad (x_j = 0 \text{ pour } j \text{ grand})$$

(7)

$$t-0=\sum_{1}^{\infty} x_j \cdot 2^{-j} \qquad (x_j = 1 \text{ pour } j \text{ grand}),$$

les expressions $F'(t)$, $F'(t+0)$, $F'(t-0)$ données par (5) sont les dérivées dyadiques (resp. droite, resp. gauche). Notre problème, un peu plus général que celui de Denjoy, consiste à calculer une fonction F à partir de ses dérivées dyadiques, supposées exister en tout point.

Restreignons F à l'ensemble des nombres dyadiques (les autres n'interviennent pas dans la définition des dérivées dyadiques) et observons que si F a ses dérivées dyadiques partout > 0, F est strictement croissante. C'est un analogue du théorème de Rolle qui s'établit aisément par dichotomie: s'il existait une corde dyadique à pente $\leqslant 0$, il existerait une suite de telles cordes au-dessus d'intervalles dyadiques emboîtés décroissants, donc une dérivée dyadique $\leqslant 0$. La première conséquence est le théorème d'unicité: si $f \equiv 0$, F est une constante, donc $f_n \equiv 0$. Voici une seconde conséquence.

LEMME. *Si* $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$, *on a* $\alpha \leqslant f_n \leqslant \beta$ *pour tout* n.

Preuve. $\alpha \leqslant \dfrac{F(t) - F(s)}{t - s} \leqslant \beta.$

LA SOLUTION: TOTALISATION DYADIQUE

Revenons à X. C'est un espace probabilisé, avec la probabilité naturelle (à savoir l'image réciproque de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ par l'application $x \to t$ vue en (6)). C'est aussi un espace topologique, engendré par les ouverts-fermés

$$C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n) = \{x : x_1 = \varepsilon_1, x_2 = \varepsilon_2, \dots, x_n = \varepsilon_n\}$$

que nous appelons cellules d'ordre $n (n \in \mathbf{N})$, et il a la propriété de Baire: si X est la limite d'une suite croissante de fermés, ces fermés, à partir d'un certain rang, contiennent une cellule. Comme les f_n sont des fonctions continues, les ensembles

$$E_m = \{x : \sup_{n \geqslant m,\, p \geqslant m} |f_p(x) - f_n(x)| \leqslant 1\}$$

sont des fermés. Comme les f_n convergent en tout point, la réunion des E_m est X. D'après la propriété de Baire, les E_m, à partir d'un certain rang,