II. La boule unité de L(E)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Par conséquent $\mathscr{G}_p$ est un sous-ensemble borné de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$, normé par

$$\| u \| = \sup_{\| x \| = 1} \| u(x) \| .$$

LEMME 2. *Pour tout groupe compact $\mathscr{G}$ contenu dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, il existe une forme quadratique Φ, à valeurs strictement positives hors de 0, et invariante par $\mathscr{G}$.*

Démonstration. Soit μ la mesure de Haar du groupe $\mathscr{G}$, et φ une forme quadratique, à valeurs > 0 hors de 0; en posant $\Phi = \int_{\mathscr{G}} \varphi \circ u d\mu(u)$, on définit une forme quadratique qui a les propriétés requises.

D'une autre façon, on peut appliquer un théorème démontré par Hochschild ([4], XV 3-1): G_1 étant la composante connexe de l'élément neutre du groupe de Lie G, on suppose G/G_1 fini; il existe alors un sous-groupe compact K, tel que tout autre sous-groupe compact de G soit contenu dans un conjugué de K; dans le cas présent on prend $G = GL(n, \mathbf{R})$, et le rôle de K peut être joué par $O(n)$ qui en est un sous-groupe compact maximal.

II. LA BOULE UNITÉ DE $\mathscr{L}(E)$

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, muni d'une norme N, et $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E muni de la norme $\mathscr{N}$ des opérateurs:

$$\mathscr{N}(u) = \sup_{N(x) = 1} N \circ u(x) .$$

Soit $\mathscr{B}_N$ la boule unité fermée de $\mathscr{L}(E)$.

LEMME 1. *Soit N non euclidienne, $\mathscr{G}_N$ l'ensemble des isométries linéaires pour N, $\mathscr{K}_N$ l'enveloppe convexe fermée de $\mathscr{G}_N$. Alors l'inclusion $\mathscr{K}_N \subset \mathscr{B}_N$ est stricte.*

Démonstration. Le choix d'une base de E permet de se ramener à la situation du paragraphe I, et de prouver l'existence d'une forme quadratique > 0 hors de 0, invariante par $\mathscr{G}_N$. Munissons E de la structure euclidienne définie par cette forme quadratique; de cette façon $\mathscr{G}_N$ est contenu dans le groupe des isométries euclidiennes de E

Par ailleurs posons $B_N = \{x \in E \mid N(x) \leqslant 1\}$; si B_N était une boule euclidienne, la norme N serait proportionnelle à la norme euclidienne de E, et serait elle aussi euclidienne.

Il existe donc deux éléments de E, notés x_1 et x_2, tels que $N(x_1) = N(x_2) = 1$, et que x_1 et x_2 soient de normes euclidiennes distinctes; x_1 et x_2 engendrent un espace vectoriel F de dimension 2, et $B_N \cap F$ n'est pas un « disque ». Nous allons montrer par l'absurde que $B_N \cap F$ admet en au moins un point x_0 une droite d'appui D_0 (voir [2] § 5, déf. 3) non orthogonale à x_0.

Si ce n'était pas le cas, la frontière du convexe $B_N \cap F$ pourrait alors être définie par une équation polaire du type $\rho = f(\theta)$, où f serait dérivable par suite de l'unicité de la droite d'appui (voir [9]); mais cette droite d'appui étant orthogonale au « rayon », on aurait nécessairement $f'(\theta) = 0$ pour tout θ, donc $f(\theta)$ constante, ce qui contredit le fait que x_1 et x_2 sont de normes euclidiennes distinctes.

L'existence de x_0 est donc établie; en vertu du théorème de Hahn Banach (voir [2] § 5), B_N admet en x_0 un hyperplan d'appui H_0 contenant D_0, donc non orthogonal à x_0 (notons que H_0 peut ici être construit par récurrence puisque la dimension de E est finie). Par symétrie, B_N admet en $-x_0$ un hyperplan d'appui parallèle à H_0.

Soit v la projection de E sur $\mathbf{R}x_0$, parallèlement à H_0. On a $v(B_N) \subset B_N$, donc $\mathcal{N}(v) = 1$, et $v \in \mathscr{B}_N$. Par ailleurs $\| v \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| v(x) \| > 1$, car v augmente strictement la norme euclidienne de tout vecteur non nul orthogonal à H_0. Nous allons montrer que v appartient à $\mathscr{B}_N \setminus \mathscr{K}_N$.

Remarquons d'abord que $\mathscr{L}(E)$ est de dimension n^2, et donc tout élément de $\mathscr{K}_N$ peut s'exprimer comme barycentre d'au plus $n^2 + 1$ éléments de $\mathscr{G}_N$ (théorème de Carathéodory, [2] § 2 exercice 9).

Si l'on avait $v \in \mathscr{K}_N$, il existerait alors

$$\begin{cases} v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathscr{G}_N \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in]0, 1[\end{cases} \qquad (m \leqslant n^2 + 1)$$

tels que $v = \sum_1^m \alpha_i v_i$ et $1 = \sum_1^m \alpha_i$. Chaque v_i est une isométrie euclidienne (inclusion de $\mathscr{G}_N$); on aurait donc

$$1 < \| v \| \leqslant \sum_1^m \alpha_i \| v_i \| = \sum_1^m \alpha_i = 1 ; \quad \text{d'où la contradiction .}$$

LEMME 2. *Munissons E d'une norme euclidienne; soit $\mathscr{B}$ la boule unité qu'on en déduit dans $\mathscr{L}(E)$. Alors tout élément extrémal* ([2] § 7, déf. 1) *de $\mathscr{B}$ est une isométrie euclidienne de E.*

Démonstration. On suppose le résultat acquis pour la dimension $n-1$; soit $u \in \mathscr{L}(E)$, tel que $\| u \| = 1$, mais que u ne soit pas une isométrie. Il existe $x_1 \in E$, tel que $\| u(x_1) \| = \| x_1 \| > 0$; composant u avec une rotation, on se ramène au cas où $u(x_1) = x_1$.

L'orthogonal V de x_1 est stable par u; en effet pour $y \in V$ et $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\| u(x_1 + ty) \|^2 \leqslant \| x_1 + ty \|^2 ,$$

c'est-à-dire

$$\| u(x_1) \|^2 + 2t(x_1 \mid u(y)) + t^2 \| u(y) \|^2 \leqslant \| x_1 \|^2 + t^2 \| y \|^2 ,$$

d'où $(x_1 \mid u(y)) = 0$, $u(y) \in V$, $u(V) \subset V$.

Mais la restriction de u à V n'est pas une isométrie (car alors u en serait une). D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$u \mid_V = (u_1 + u_2)/2 , \quad \text{où} \quad u_1 \neq u_2 \quad \text{et} \quad \| u_1 \| = \| u_2 \| = 1 .$$

On peut prolonger u_1 et u_2, de V à E, en $\tilde{u_1}$ et $\tilde{u_2} \in \mathscr{B}$ tels que les restrictions de $\tilde{u_1}$ et $\tilde{u_2}$ à $\mathbf{R}x_1$ soient l'identité. Comme $u = (\tilde{u_1} + \tilde{u_2})/2$ et $\tilde{u_1} \neq \tilde{u_2}$, u n'est pas un point extrémal de $\mathscr{B}$.

Désormais pour tout convexe A, on note ∂A l'ensemble des éléments extrémaux de A.

THÉORÈME 1. *Soit E espace vectoriel réel de dimension finie. Alors*

1) *Pour toute norme N sur E, on a $\mathscr{G}_N \subset \partial \mathscr{B}_N$.*

2) *L'égalité $\mathscr{G}_N = \partial \mathscr{B}_N$, équivaut à l'assertion: N est euclidienne.*

Démonstration.

1) Soit $u \in \mathscr{G}_N$. Supposons que $u = (u_1 + u_2)/2$, avec u_1 et $u_2 \in \mathscr{B}_N$. Si B_N est la boule unité fermée de E, on a $u(\partial B_N) = \partial B_N$. Pour $x \in \partial B_N$, l'égalité $u(x) = (u_1(x) + u_2(x))/2$ implique $u_1(x) = u_2(x) = u(x)$. Les restrictions de u, u_1 et u_2 à ∂B_N sont identiques, donc $u = u_1 = u_2$, et finalement $u \in \partial \mathscr{B}_N$.

2) D'après le lemme 1 ci-dessus, on a $\partial \mathscr{B}_N \neq \mathscr{G}_N$ lorsque N n'est pas euclidienne. Inversement supposons N euclidienne; le lemme 2 permet d'écrire $\partial \mathscr{B}_N \subset \mathscr{G}_N$. Puisque, d'après 1), l'inclusion inverse a lieu, on en déduit $\partial \mathscr{B}_N = \mathscr{G}_N$.