

## §4. Minorations non effectives de $h(-d)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$h(-d) \geq \frac{1}{\pi} (1-\alpha)d^{\alpha/2} = \frac{2}{\pi e} (\sqrt{d}/\log d).$$

Si nous sommes entrés dans les détails de cette démonstration, c'est pour bien illustrer les deux points suivants :

1) Nous voyons à l'œuvre le principe général énoncé à la fin du § 2, qui dit que si  $d$  est grand et  $h(-d)$  est petit,  $\zeta_K(s)$  doit ressembler à  $\zeta(2s)$ : en effet  $\zeta_K(s)$  admet un pôle en 1, alors que  $\zeta(2s)$  est holomorphe pour  $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ ; mais si  $d$  est grand et  $h(-d)$  petit, l'existence du pôle pour  $\zeta_K$  doit être contrebalancée par l'existence d'un zéro de  $\zeta_K$  proche de 1, d'après la proposition ci-dessus.

2) Si l'hypothèse de Riemann généralisée était démontrée, les questions posées dans l'introduction de cette deuxième partie seraient résolues: ainsi par exemple il résulterait de la proposition que tous les discriminants fondamentaux  $-d$  pour lesquels  $h(-d) \leq 30$  figurent dans la table de Buell.

#### § 4. MINORATIONS NON EFFECTIVES DE $h(-d)$

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent,  $h(-d)$  est grand lorsque  $d$  est grand et que la fonction  $L(\chi_d, s)$ , où  $\chi_d(n) = \left(\frac{-d}{n}\right)$ , n'a pas de zéro voisin de 1. Supposons alors que  $h(-d)$  et  $h(-d')$  soient petits pour deux grandes valeurs de  $d$  et  $d'$  (en un sens que l'on peut préciser, ce que je ne ferai pas ici). Les fonctions  $L(\chi_d, s)$  et  $L(\chi_{d'}, s)$  ont alors chacune un zéro voisin de 1, et l'on en déduit que la fonction zêta du corps biquadratique  $\mathbf{Q}[i\sqrt{d}, i\sqrt{d'}]$  a deux zéros voisins de 1. Des estimées élémentaires permettent d'en déduire une contradiction. Cette méthode montre que  $h(-d)$  ne peut être petit que pour au plus un grand  $d$ . Elle est une variante de celle utilisée par Heilbronn pour montrer que

$$(29) \quad \lim_{d \rightarrow \infty} h(-d) = \infty,$$

et a été utilisée par Siegel<sup>1)</sup> pour préciser à quelle allure  $h(-d)$  tend vers  $+\infty$ : Siegel montre que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $d(\varepsilon)$  tel que:  $h(-d) \geq \sqrt{d}^{1-\varepsilon}$  pour  $d \geq d(\varepsilon)$ .

<sup>1)</sup> C. L. SIEGEL, *Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper*, Acta Arithmetica 1 (1936), 83-86.

Il n'est malheureusement pas possible de calculer  $d(\varepsilon)$  car cet entier dépend de l'hypothétique grand discriminant exceptionnel pour lequel  $h(-d)$  serait petit.

On peut cependant obtenir par les méthodes précédentes un énoncé « effectif à au plus une exception près ». Cela a été fait par Tatzuzawa <sup>1)</sup> en explicitant les constantes dans la démonstration de Siegel: si  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ , on a

$$(30) \quad h(-d) \geq \frac{0,655}{\pi} \varepsilon d^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

pour  $d > \sup(e^{1/\varepsilon}, e^{11,2})$  à au plus une exception près. On en déduit par exemple, en prenant  $\varepsilon = 1/15$ , que tous les discriminants fondamentaux  $-d$  pour lesquels  $h(-d) \leq 10$ , à au plus une exception près, figurent dans la table de Buell et par suite sont de valeur absolue  $\leq 13843$ .

#### § 5. LES CAS $h = 1$ ET $h = 2$ <sup>2)</sup>

D'après le paragraphe précédent, il existe au plus un discriminant fondamental  $-d$  tel que  $h(-d) = 1$  et qui ne figure pas parmi les neuf déjà connus de Gauss. La question de savoir si un tel  $d$  existe est restée longtemps ouverte et est devenue célèbre sous le nom de *problème du dixième discriminant* (ou *du dixième corps quadratique imaginaire*).

En 1952, Heegner publie une preuve de la non-existence du dixième discriminant reposant sur la théorie des formes modulaires, mais cette preuve fut jugée incomplète à l'époque.

En 1966, Stark et Baker prouvent indépendamment la non-existence du dixième discriminant. Dans sa preuve, Stark ramène ce problème à la détermination des solutions entières des équations  $8x^6 \pm 1 = y^2$  et  $x^6 \pm 1 = 2y^2$ . Ces équations apparaissent déjà dans le travail de Heegner. En fait, deux ans plus tard, Stark et Birch reprennent en détail les arguments de Heegner et montrent la validité de sa démonstration.

La méthode de Baker utilise les minorations effectives de formes linéaires en logarithmes de nombres algébriques. Elle a l'avantage de s'étendre au problème du nombre de classes 2, et a permis à Baker et Stark de majorer

<sup>1)</sup> T. TATUZAWA, *On a theorem of Siegel*, Jap. J. of Math., 21 (1951), 163-178.

<sup>2)</sup> Pour un exposé plus détaillé des questions abordées dans ce paragraphe, avec références bibliographiques, on pourra consulter par exemple l'exposé de M. Waldschmidt au Séminaire de Théorie des nombres de Paris en 1973 (exposé 12).