Nichtparametrische Regression am Beispiel der Helmerttransformation

Autor(en): **Fischer, B. / Schwaninger, M. / Sievers, B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Geomatik Schweiz : Geoinformation und Landmanagement = Géomatique Suisse : géoinformation et gestion du territoire = Geomatica Svizzera : geoinformazione e gestione del territorio**

Band (Jahr): **101 (2003)**

Heft 6: **FHBB : 40 Jahre Vermessung und Geomatik = FHBB : 40 années de géomatique**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-236035

Nichtparametrische Regression am Beispiel der Helmert-transformation

Zur Beschäftigung der Geomatik-Ingenieurinnen und -Ingenieure FH wird in Zukunft vermehrt die Transformation und Interpolation bestehender Punktfelder in einen neuen Bezugsrahmen gehören. In einer Diplomarbeit mit anschliessender Weiterbearbeitung befassten sich die Lehrbereiche Mathematik und geodätische Statistik vertieft mit der Thematik der Transformationen und der damit einhergehenden Beurteilung und Verteilung der Restklaffungen.
Der vorliegende Artikel zeigt, wie mit dem Kollokationsansatz am Beispiel der Helmerttransformation systematische Fehleranteile geschätzt werden können. Dies kann dazu dienen, Gebiete ähnlichen Spannungsverhaltens abzugrenzen. Diese Gebiete können dann mit einer allgemeinen oder maschenweisen Affintransformation (z.B. Helmert, TRANSINT, FINELTRA) in den neuen Bezugsrahmen überführt werden.

A l'avenir, les ingénieurs géomaticiens / géomaticiennes HES s'occuperont de plus en plus de la transformation et de l'interpolation de semis de points existants par rapport à de nouveaux cadres de référence. Dans le cadre d'un travail de diplôme suivi d'un travail complémentaire, les domaines d'enseignement de la mathématique et de la statistique géodésique se sont occupés de façon approfondie de la thématique de la transformation et du jugement et de la répartition des différences résiduelles y relatives.
Le présent article montre comment l'on peut évaluer les proportions d'erreurs systématiques avec la théorie de la collocation à l'aide de la transformation de Helmert. Cela peut servir à délimiter des régions de comportement de tension semblable. Ces régions peuvent alors être transcrites dans le nouveau cadre de référence par une transformation d'affinités générale ou partielle (par ex. Helmert, TRANSINT, FINELTRA).

In futuro, il lavoro degli ingegneri in geomatica SUP comprenderà sempre più spesso la trasformazione e l'interpolazione di punti in un nuovo quadro di riferimento. In un lavoro di diploma, con successiva elaborazione del tema, le discipline della matematica e della statistica geodetica si sono occupate in modo approfondito della tematica delle trasformazioni e della relativa valutazione e distribuzione degli scarti residui. Nell'articolo seguente si dimostra come il principio della collocazione – partendo dall'esempio della trasformazione di Helmert – permetta di valutare le parti sistematiche di errore. Questo serve a delimitare campi con tensioni simili. Questi campi sono poi trasferibili, tramite una trasformazione affine (per es. Helmert, TRANSINT, FINELTRA) in nuovi quadri di riferimento.

B. Fischer, M. Schwaninger, B. Sievers

Der Ansatz

Bei der herkömmlichen Ausgleichung nach Gauss-Markov mit dem funktionalen Modell

$$l = A \cdot x - v, \quad v^T Pv = \min \qquad (1)$$

wird davon ausgegangen, dass die Verbesserungen v an den Beobachtungen normalverteilt sind. Sollen mit (1) die unbekannten Transformationsparameter x einer Helmerttransformation $l(t) = A(t)x$ geschätzt werden, so bezeichnet t die Ausgangskoordinaten, l die Zielkoordinaten und die Koeffizientenmatrix A berechnet sich mit Hilfe der t.
Mit dem funktionalen Modell

$$l(t) = A(t)x + s(t) + n,$$
$$\alpha \cdot s^T Rs + n^T Pn = \min \qquad (2)$$

wird zusätzlich versucht, systematische Abweichungen s auch noch zu erfassen. Die Beziehung $l = Ax + s + n$ kann auf zwei Arten interpretiert werden. In der Kollokation ist Ax der Modellanteil und der Fehler s + n besteht aus zwei Teilen, wobei s den systematischen Anteil bezeichnet und Signal genannt wird. In der Auffassung der nichtparametrischen Regression ist das Modell durch Ax + s gegeben und aus dem parametrischen Anteil Ax sowie dem nichtparametrischen Anteil s zusammengesetzt. Für praktische Rechnungen sind die beiden Auffassungen gleichwertig. Der Unterschied besteht in der Behandlung des Signals s als stochastische bzw. nichtstochastische Grösse. Der zufällige, normalverteilte Fehler ist durch n («noise», Rauschen) gegeben, der Regularisierungsparameter α beschreibt das Signal zu Rausch-Verhältnis. Die positiv definite Matrix R modelliert das Signalverhalten, die Gewichtsmatrix P analog zu (1) die Genauigkeit der Beobachtungen. Es stellen sich die Probleme:

- Wie soll man s beschreiben?
- Wie ist α zu bestimmen?

Schätzungen für x, s, n hängen von α ab. Die Interpolation einer solchen Transformation an Neupunkten umfasst die Berechnung von Ax + s in diesen Punkten. Weisen die Passpunkte systematische Fehler auf, führt der Ansatz (2) zu einer merklichen Genauigkeitssteigerung gegenüber einer herkömmlichen Transformation.

Darstellung von s

Das Signal

$$s(t) = \sum_i k_i \cdot r(|t_i - t|) \qquad (3)$$

wird als Linearkombination einer verschobenen Basisfunktion r dargestellt (k_i sind die Streckungsfaktoren der einzelnen Basisfunktionen). Die Elemente der Matrix R sind durch

$$R_{ij} = r(|t_i - t_j|) \qquad (4)$$

gegeben. Folgende Basisfunktionen wurden im Rahmen unserer Arbeiten verwendet:

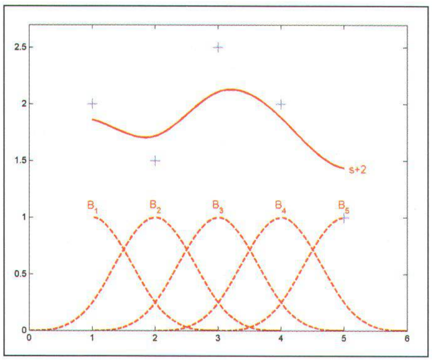

Abb. 1: **$s = 0.139*B_1 - 0.216*B_2 + 0.394*B_3 + 0.119*B_4 - 0.436*B_5$, in der Abbildung um +2 nach oben verschoben.**

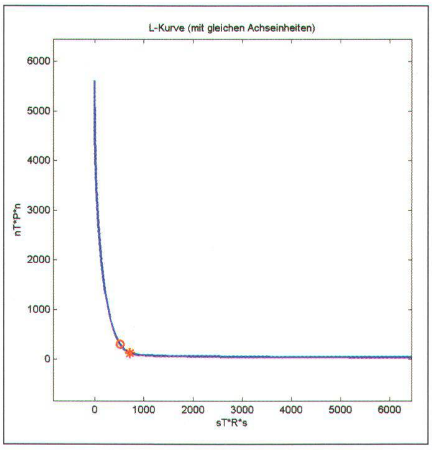

Abb. 2: * grösste Krümmung, ° kürzester Abstand zum Ursprung.

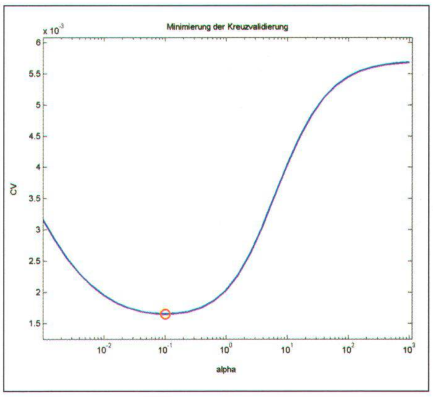

Abb. 3: ° kleinster CV-Wert.

- B-Splines vom Grad 0–3
- Gauss'sche Glockenkurve

Entsprechend der Interpretation von s als stochastische Grösse wird in der Kollokation die Basisfunktion als Autokorrelationsfunktion von s aufgefasst.

Bestimmung des Regularisierungsparameters α

Zur Bestimmung des Regularisierungsparameters α aus den Beobachtungen sind verschiedene Methoden vorgeschlagen worden.

- L-Kurve (mit Krümmungs- oder Distanzkriterium)
- Methode von Morozov

Die L-Kurve entsteht, wenn $s(\alpha)^T Rs(\alpha)$ und $n(\alpha)^T Pn(\alpha)$ gegeneinander aufgetragen werden. Die Kurve zeigt immer das L-förmige Aussehen wie in Abbildung 2. Bei der L-Kurven-Methode wird das α gesucht, welches zum L-Kurvenpunkt mit der grössten Krümmung bzw. dem kürzesten Abstand zum Ursprung gehört. An der «Ecke» der L-Kurve wechselt die Lösung von signal- zu rauschdominiert. Bei der Methode von Morozov wird n vorgegeben und α entsprechend bestimmt, d.h. auf der L-Kurve wird ein Punkt vorgegeben und das zugehörige α berechnet.

- Kreuzvalidierung
  α wird so gewählt, dass eine zusätzliche Beobachtung einen möglichst geringen zufälligen Fehler CV aufweist (Abb. 3). CV wird mit Kreuzvalidierung berechnet.

- Kollokation nach Kraus
  Hier werden R und α zusammen aus den Beobachtungen geschätzt.

Praktische Rechnungen

Es wurden MATLAB-Pogramme entwickelt für:

- eindimensionale Regression und
- Helmerttransformation.

Tests wurden im Fall der Helmerttransformation vor allem mit dem LFP2 Netz Gelfingen (Kanton Luzern) und mit dem LFP2- bzw. Diagnosenetz Basel-Stadt berechnet (Abb. 4).

Wird das Signal richtig modelliert, so ist das Rauschen normalverteilt und enthält keine systematischen Anteile. Der Informationsgehalt der Beobachtungen ist so voll ausgeschöpft.

Ergebnisse

Bei der heuristischen L-Kurven-Methode erhielten wir immer gute Resultate, ebenso mit der Morozov-Methode. Die Kreuzvalidierung versagt manchmal, da es vorkommen kann, dass CV kein sauberes Minimum aufweist. Die Methode von Kraus weist das Problem auf, dass die Schätzungen für die Kovarianzmatrix R positiv definit sein sollten, was häufig nicht zutrifft.

Literatur:

Ein Verzeichnis kann bei den Autoren angefordert werden.

Prof. Dr. Beat Fischer
Dipl. Ing. FH Michael Schwaninger
Prof. Beat Sievers
FHBB Fachhochschule beider Basel
CH-4132 Muttenz
b.fischer@fhbb.ch
mschwaninger@hotmail.com
b.sievers@fhbb.ch

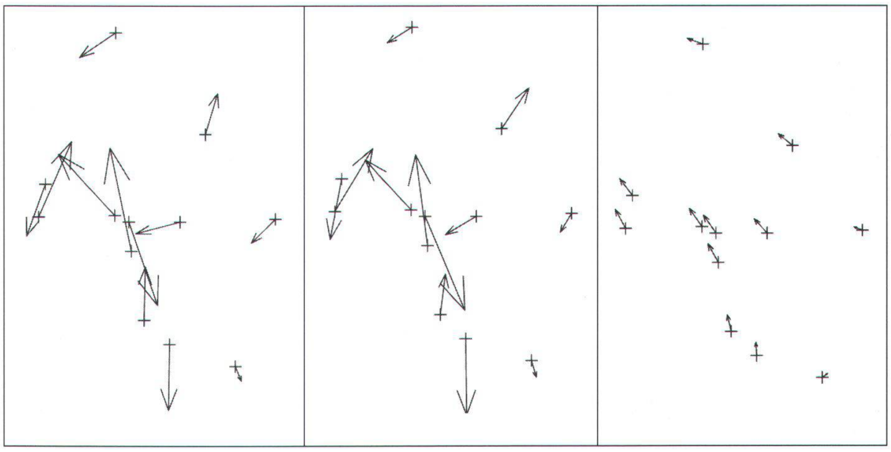

Abb. 4: Links die Restklaffungen einer Helmerttransformation einiger Punkte des LFP2-Netzes Gelfingen. Dieselben Daten wurden mit dem Kollokationsansatz ausgeglichen. Die Rausch-Vektoren (Mitte) und die Signalvektoren (rechts) zeigen deutlich den Unterschied zwischen dem zufälligen und dem systematischen Anteil der Restklaffungen.