UNE THÉORIE DE DENJOY DES MARTINGALES DYADIQUES

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 255-268

UNE THÉORIE DE DENJOY DES MARTINGALES DYADIQUES

par Jean-Pierre KAHANE

En 1912, dans deux notes aux *Comptes-Rendus*, Arnaud Denjoy créait la *totalisation* comme procédé permettant de calculer la primitive de toute fonction dérivée. Ce procédé mariait trois théories: les ordinaux de Cantor, l'intégration de Lebesgue, la topologie de Baire. Modifié, il allait permettre à Denjoy la résolution d'un autre problème, inspiré par Riemann et Cantor, le calcul des coefficients d'une série trigonométrique partout convergente à partir de sa somme. L'exposé des totalisations de Denjoy est réputé difficile. Lui-même y a consacré d'importants articles et de gros ouvrages. Mon but est de donner un exposé complet d'une totalisation simplifiée, permettant le calcul des primitives, dans le cadre qui me paraît le mieux adapté: celui des martingales dyadiques partout convergentes ou, de manière équivalente, celui des dérivées dyadiques. J'exposerai le problème, puis la solution. Quelques commentaires suivront. Dans un appendice je caractériserai la distribution des dérivées dyadiques, et je terminerai par quelques citations et un pastiche.

LE PROBLÈME

Posons $X = \{0, 1\}^{\mathbf{N}^+}$. Un élément x de X est une suite $(x_1, x_2, ...)$ à valeurs 0 ou 1. Une martingale dyadique est une suite de fonctions f_n définies sur X ($n \in \mathbf{N}$), à valeurs réelles, et vérifiant les conditions suivantes:

1. f_0 est une constante et $f_n(x)$ ne dépend que de $x_1, x_2, ... x_n$; on écrira (abus véniel)

$$f_n(x) = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1}$$

2. Pour tout n et tout $(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{2}\left(f_{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, 0) + f_{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, 1)\right). \tag{2}$$

Nous considérons des martingales dyadiques partout convergentes, donc

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{3}$$

existe pour tout $x \in X$. Notre but est de calculer la valeur moyenne de la martingale (c'est la valeur moyenne de f_n, indépendante de n), soit

$$f_0 = \frac{1}{2}(f_1(0)+f_1(1)) = \mathscr{M}(f_n) = 2^{-n} \sum f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{4}$$

à partir de la fonction $f(x)$.

La situation peut encore se décrire ainsi. On considère sur l'intervalle fermé $I = [0, 1]$ une fonction réelle F. On pose

$$f_0 = F(1) - F(0)$$

et généralement

$$f_n(x_1, ..., x_n) = 2^n \left(F\left(\frac{x_1}{2} + ... + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) - F\left(\frac{x_1}{2} + ... + \frac{x_n}{2^n}\right)\right);$$

c'est la pente de la corde du graphe de F au-dessus de l'intervalle dyadique

$$\left[\frac{x_1}{2} + ... + \frac{x_n}{2^n}, \frac{x_1}{2} + ... + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right]$$

(c'est ce que nous appellerons une « corde dyadique »). Toute martingale dyadique peut s'obtenir de cette façon. Si la fonction F est partout dérivable, la martingale est partout convergente, avec pour limite

$$f(x) = F'\left(\sum_1^\infty x_j \cdot 2^{-j}\right). \tag{5}$$

Le calcul de f_0 à partir de f est bien une totalisation de la dérivée F' sur l'intervalle $[0, 1]$. Réciproquement, si la martingale est partout convergente, on peut dire que F est « dérivable au sens dyadique »; cela signifie, pour tout point $t \in [0, 1]$ non dyadique, que les pentes des cordes dyadiques au-dessus de t tendent vers une limite, la « dérivée dyadique », et qu'en tout point $t \in [0, 1]$ dyadique, les pentes des cordes dyadiques ayant leur extrémité droite resp. gauche au-dessus de t tendent vers une limite, la « dérivée dyadique gauche » resp. « droite ». En posant, quand t n'est pas dyadique

$$t = \sum_1^\infty x_j 2^{-j} \tag{6}$$

et, quand t est dyadique

$$(7)\qquad \begin{aligned} t+0 &= \sum_1^\infty x_j \cdot 2^{-j} \qquad (x_j = 0 \text{ pour } j \text{ grand}) \\ t-0 &= \sum_1^\infty x_j \cdot 2^{-j} \qquad (x_j = 1 \text{ pour } j \text{ grand}), \end{aligned}$$

les expressions $F'(t)$, $F'(t+0)$, $F'(t-0)$ données par (5) sont les dérivées dyadiques (resp. droite, resp. gauche). Notre problème, un peu plus général que celui de Denjoy, consiste à calculer une fonction F à partir de ses dérivées dyadiques, supposées exister en tout point.

Restreignons F à l'ensemble des nombres dyadiques (les autres n'interviennent pas dans la définition des dérivées dyadiques) et observons que si F a ses dérivées dyadiques partout > 0, F est strictement croissante. C'est un analogue du théorème de Rolle qui s'établit aisément par dichotomie: s'il existait une corde dyadique à pente $\leqslant 0$, il existerait une suite de telles cordes au-dessus d'intervalles dyadiques emboîtés décroissants, donc une dérivée dyadique $\leqslant 0$. La première conséquence est le théorème d'unicité: si $f \equiv 0$, F est une constante, donc $f_n \equiv 0$. Voici une seconde conséquence.

LEMME. *Si* $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$, *on a* $\alpha \leqslant f_n \leqslant \beta$ *pour tout* n.

Preuve. $\alpha \leqslant \dfrac{F(t) - F(s)}{t - s} \leqslant \beta.$

LA SOLUTION: TOTALISATION DYADIQUE

Revenons à X. C'est un espace probabilisé, avec la probabilité naturelle (à savoir l'image réciproque de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ par l'application $x \to t$ vue en (6)). C'est aussi un espace topologique, engendré par les ouverts-fermés

$$C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n) = \{x : x_1 = \varepsilon_1, x_2 = \varepsilon_2, \dots, x_n = \varepsilon_n\}$$

que nous appelons cellules d'ordre $n (n \in \mathbf{N})$, et il a la propriété de Baire: si X est la limite d'une suite croissante de fermés, ces fermés, à partir d'un certain rang, contiennent une cellule. Comme les f_n sont des fonctions continues, les ensembles

$$E_m = \{x : \sup_{n \geqslant m,\, p \geqslant m} | f_p(x) - f_n(x) | \leqslant 1\}$$

sont des fermés. Comme les f_n convergent en tout point, la réunion des E_m est X. D'après la propriété de Baire, les E_m, à partir d'un certain rang, contiennent une cellule. En conclusion, il existe des cellules sur lesquelles la fonction f est bornée. Soit C une telle cellule, d'ordre minimum.

Si $C = X$, le lemme montre que les f_n sont bornées. Le théorème de Lebesgue s'applique et donne

$$f_0 = \int_X f_n(x)dx = \int_X f(x)dx = \mathscr{M}_X(f)$$

(dx représente l'élément de mesure de probabilité, et $\mathscr{M}_X$ la moyenne sur X). Le problème est alors résolu. La totalisation s'arrête à la première étape.

En général, la martingale f_n, restreinte à C et à des valeurs de n assez grandes (supérieures à l'ordre de C) définit une nouvelle martingale dyadique, dont la valeur moyenne est

$$f(C) = \mathscr{M}_C(f_n) = \mathscr{M}_C(f) \qquad (n \geqslant n(C))$$

($\mathscr{M}_C$ représentant la moyenne sur C et $n(C)$ l'ordre de C), parce que les f_n sont bornées sur C et convergent vers f. Formellement, la martingale dyadique f_n restreinte à $C = C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_k)$ est la martingale

$$g_m(y_1, y_2, \dots y_m) = f_{m+k}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_k, y_1, y_2, \dots y_m) \qquad (m \in N,\ y \in X)$$

et la moyenne sur C est l'intégrale par rapport à dy.

Si $C \neq X$, on répète l'argument ci-dessus en remplaçant X par $X \backslash C$. On obtient une nouvelle cellule d'ordre minimum, C^2, disjointe de C, sur laquelle la fonction f est bornée. Remarquons que $C + C^2 \neq X$ (sinon, l'ordre de C ne serait pas minimal). On peut donc poursuivre: posant $C^1 = C$, on définit une suite infinie de cellules disjointes $C^1, C^2, \dots, C^k \dots$ d'ordres croissants (chacune, à son étape, d'ordre minimum) telles que f est bornée sur chaque C^k. Posons $f^0 = f$. Remplaçons f sur C^1 par sa moyenne $f(C^1)$, puis sur C^2 par sa moyenne $f(C^2)$, et ainsi de suite: on obtient une suite $f^1, f^2, \dots, f^k, \dots$ telle qu'on passe de f^{k-1} à f^k en prenant pour nouvelle valeur sur C^k la moyenne $f^{k-1}(C^k)$. La k-ième étape de la totalisation consiste précisément à déterminer C^k et à calculer f^k. Remarquons que f^k est la limite de la martingale $f_n^k (n=0, 1, \dots)$ obtenue en arrêtant la martingale f_n, sur chaque $C^j (j \leqslant k)$, au temps $n(C^j)$.

Posons maintenant

$$G^\omega = \sum_1^\infty C^k, \qquad f^\omega = \lim_{k\to\infty} f^k .$$

L'étape d'ordre ω (premier ordinal infini) consiste à déterminer G^ω et f^ω.

Remarquons que G^{ω} est dense dans X, que $G^{\omega} \neq X$, et que les C^k sont les cellules maximales contenues dans G^{ω} (il est bon de noter que, si une cellule admet une partition en cellules, cette partition est finie). Posons $K^{\omega} = X \backslash G^{\omega}$. Ainsi $f^{\omega} = f$ sur K^{ω}.

Remarquons aussi que f^{ω} est la limite de la martingale dyadique f_n^{ω} qui s'obtient en remplaçant $f_n(x)$ par $f(C^k)$ quand $x \in C^k$ et $n \geqslant n(C^k)$.

L'étape d'ordre $\omega + 1$ consiste à répéter pour f^{ω} et K^{ω} ce que nous avons fait au départ pour f et X. On considère les fermés

$$E_m^{\omega} = \{x : \sup_{n \geqslant m,\, p \geqslant m} | f_p^{\omega}(x) - f_n^{\omega}(x) | \leqslant 1\}.$$

Suivant Baire, il existe un entier m et une cellule C tels que

$$\emptyset \neq C \cap K^{\omega} \subset E_m^{\omega} \cap K^{\omega}.$$

La différence $C \backslash C \cap K^{\omega}$ est une somme infinie de C^k (les cellules maximales contenues dans $C \cap G^{\omega}$), disons

$$C \backslash C \cap K^{\omega} = \sum_{k \in \Lambda} C^k, \qquad \Lambda = \Lambda(C, K^{\omega}).$$

Pour chaque $k \in \Lambda$, la cellule mère de C^k (c'est-à-dire d'ordre immédiatement inférieur et contenant C^k) rencontre K^{ω}; sinon, elle aurait dû être choisie comme $C^j, j \leqslant k$. Désignons par D^k la cellule sœur de C^k; remarquons qu'elle est contenue dans C, donc

$$\emptyset \neq D^k \cap K^{\omega} \subset E_m^{\omega} \cap K^{\omega}.$$

Choisissons $n = n(C^k)$: alors f_n^{ω} est constant sur C^k (égal à $f(C^k)$), f_n^{ω} est constant sur D^k, et f_{n-1}^{ω} est constant sur $C^k + D^k$, égal à la moyenne des deux valeurs précédentes. Si $k \in \Lambda$ et k est assez grand, à savoir $n = n(C_k) > m$, choisissons $x \in D^k \cap K^{\omega}$. Comme $x \in E_m^{\omega}$ on a

$$| f_n^{\omega}(x) - f^{\omega}(x) | \leqslant 1$$
$$| f_{n-1}^{\omega}(x) - f^{\omega}(x) | \leqslant 1$$

et par conséquent

$$| f(C_k) - f^{\omega}(x) | \leqslant 3.$$

Or f^{ω} est borné sur $C \cap K^{\omega}$. Donc f^{ω} est uniformément borné sur les $C^k (k \in \Lambda)$. En définitive, f^{ω} est borné sur C.

On choisit pour $C^{\omega+1}$ une cellule maximale, intersectant K^{ω}, où f^{ω} est borné, et on considère la moyenne $f^{\omega}(C^{\omega+1})$. C'est l'étape d'ordre $\omega + 1$.

Si $C^{\omega+1} = X$, on a terminé. Sinon, on peut poursuivre, et définir une suite de cellules d'ordres croissants $C^{\omega+2}$, $C^{\omega+3}$, $C^{\omega+k}$, ... (chacune, à son étape, étant d'ordre minimum) telles que f^{ω} est bornée sur chaque $C^{\omega+k}$. On désigne par $f^{\omega}(C^{\omega+k})$ la valeur moyenne de f^{ω} sur $C^{\omega+k}$. L'étape d'ordre $\omega + k$ consiste à définir $C^{\omega+k}$ et à calculer $f^{\omega}(C^{\omega+k})$. Les cellules $C^{\omega+k}(k=0, 1, ...)$ sont disjointes, leur réunion $G^{2\omega}$ est dense dans X et $K^{2\omega} = X \backslash G^{2\omega}$ est un compact non vide. En remplaçant f^{ω} par $f^{\omega}(C^{\omega+k})$ sur chaque $C^{\omega+k}$, on obtient une nouvelle fonction $f^{2\omega}$, qui est encore limite de martingale dyadique, transformée de la martingale initiale par un dispositif d'arrêt. C'est l'étape d'ordre 2ω.

L'étape d'ordre $2\omega + 1$ considère $f^{2\omega}$ et $K^{2\omega}$. Si $f^{2\omega}$ est bornée sur $K^{2\omega}$ (c'est-à-dire si f est bornée sur $K^{2\omega}$, puisque $f = f^{\omega} = f^{2\omega}$ sur $K^{2\omega}$), $f^{2\omega}$ est bornée sur X et son intégration fournit f_0: la totalisation s'arrête à cette étape. Sinon, on va comme ci-dessus jusqu'à l'étape 3ω, où se trouvent définis un compact $K^{3\omega}$ strictement inclus dans $K^{2\omega}$, et une fonction $f^{3\omega}$, limite de martingale dyadique.

Si $f^{3\omega}$ est bornée sur $K^{3\omega}$, elle est bornée partout, son intégration fournit f_0, la totalisation s'arrête à l'étape 3ω. Sinon, elle se poursuit jusqu'à l'étape 4ω, et ainsi de suite.

Si la totalisation ne s'arrête pas avant l'étape ω^2, les compacts K^{ω}, $K^{2\omega}$, $K^{3\omega}$, ... ont une intersection non vide, K^{ω^2}, et les fonctions f^{ω}, $f^{2\omega}$, $f^{3\omega}$, ... ont une limite f^{ω^2}, égale à f sur K^{ω^2}, constante sur les cellules maximales contenues dans le complémentaire de K^{ω^2}, et limite d'une martingale transformée par arrêt de la martingale initiale. La totalisation s'arrête à l'étape ω^2 si f est bornée sur K^{ω^2}, et se poursuit sinon jusqu'à l'étape $\omega^2 + \omega$ au moins.

De façon générale, si α est un ordinal limite avant lequel la totalisation se poursuit, K^{α} est la limite décroissante des K^{β}, $\beta < \alpha$, et f^{α} est égale à f sur K^{α}, et limite de la martingale initiale convenablement arrêtée. La totalisation s'arrête si f est bornée sur K^{α}, donc f^{α} bornée partout. Elle se poursuit sinon jusqu'à $\alpha + \omega$ au moins, par le procédé de construction des $K^{\alpha+k}$ et $f^{\alpha+k}$ qui se trouve détaillé plus haut lorsque $\alpha = \omega$.

La chaîne des K^{α} est strictement décroissante, puisque le passage de K^{α} à $K^{\alpha+1}$ consiste à supprimer une portion dyadique de K^{α} (intersection de K^{α} avec une cellule convenable). Comme il n'y a qu'une infinité dénombrable de cellules, la chaîne s'arrête à un ordinal dénombrable, où la totalisation est achevée.

Commentaires

1. Il existe une autre structure intéressante de X, celle du groupe abélien. Les caractères coordonnés sont les « fonctions de Rademacher » $r_k(x) = (-1)^{x_k} (k=1, 2, \ldots)$. Les caractères généraux sont les « fonctions de Walsh » $w_n (n=0, 1, \ldots)$ ainsi définies

$$w_n = \prod r_k^{\alpha_k} \Leftrightarrow n = \sum \alpha_k 2^{k-1}$$

($\alpha_k = 0$ ou 1, $\sum$ somme finie, $\prod$ produit fini). Une « série de Fourier-Walsh » est de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x) .$$

Les sommes partielles d'ordre 2^k (de la forme $\sum_{0 \leqslant n < 2^k}$) d'une telle série forment une martingale dyadique. Si la série est partout convergente, la totalisation que nous venons de décrire permet de calculer à partir de la somme le premier coefficient, a_0, et de même (en totalisant sur des cellules au lieu de X entier) les autres coefficients. Ainsi, sur ce modèle dyadique, le calcul des coefficients d'une série trigonométrique (remplacée par une série de Fourier-Walsh) apparaît très naturel. Naturellement, le cas trigonométrique ordinaire requiert beaucoup plus de travail.

2. Dans la théorie ordinaire des martingales, on ne se soucie pas des ensembles de mesure nulle. Ici, il est essentiel que la martingale converge partout sur X. D'une martingale convergeant partout sauf en un point, on ne saurait rien dire.

3. Dans la théorie ordinaire des martingales, s'il y a convergence dans L^1, la valeur initiale est l'intégrale de la fonction limite, et ne dépend donc que de la distribution de la fonction limite. D'ailleurs, la distribution de la fonction limite peut être n'importe quelle distribution μ sur $\mathbf{R}$, pourvu que l'intégrale $\int |y| \, d\mu(y)$ soit finie. (On choisit arbitrairement une fonction ayant cette distribution; ses espérances conditionnelles relativement aux tribus $\mathscr{T}_n$ engendrées par les cellules d'ordre n convergent vers elle presque partout et dans L^1). Ici, il apparaît deux cas. Si la limite (partout) est intégrable, la valeur initiale est l'intégrale de la limite, et ne dépend donc que de sa distribution. Sinon, la valeur initiale est la totale de la limite, et elle n'est pas du tout déterminée par sa distribution. Il est naturel de chercher ce qu'on peut dire de la distribution de la fonction limite. C'est l'objet de l'appendice.

4. Dans la totalisation dyadique apparaît une chaîne de compacts non-denses K^α strictement décroissants. Limitons-nous aux ordinaux limites

$$(\alpha = \omega, 2\omega, 3\omega, \ldots \omega^2, \omega^2 + \omega, \ldots),$$

que nous écrivons

$$\alpha = \beta\omega \quad (\beta = 1, 2, 3, \ldots \omega, \omega + 1, \ldots).$$

La différence $K^{(\beta+1)\omega} \backslash K^{\beta\omega}$ est un ensemble infini. Inversement, étant donné une chaîne (dénombrable) $\mathscr{K}^\beta$ de compacts non-denses de X, décroissants vers $\emptyset$, et telle que $\mathscr{K}^\beta \backslash \mathscr{K}^{\beta+1}$ est infini pour tout β, on voit comment construire une chaîne K^α telle que $K^{\beta\omega} = \mathscr{K}^\beta$, telle que les K^α soient des compacts non-denses, et qu'on passe de K^α à $K^{\alpha+1}$ par ablation d'une portion dyadique. On voit encore, les K^α étant ainsi choisis, comment construire des f^α, tels que chaque f^α soit constante sur les cellules maximales disjointes de K^α, non bornée au voisinage de chaque point de $K^{\alpha+1}$ et bornée au voisinage de $K^\alpha \backslash K^{\alpha+1}$, avec la propriété que la moyenne de f^α sur la cellule minimale C^α contenant $K^\alpha \backslash K^{\alpha+1}$ vaut $f^{\alpha+1}$ (constante sur C^α). Ainsi, en remontant la chaîne, on peut reconstituer la fonction $f = f^0$ telle que, dans la totalisation, on trouve à l'étape d'ordre α le compact K^α et la fonction f^α.

5. Voici quelques références. Les travaux de Denjoy débutent avec deux notes aux Comptes-Rendus [1], [2], qui exposent rapidement la totalisation qu'il appellera plus tard « simple », et son usage pour le calcul des primitives. La totalisation dyadique ici introduite diffère de la totalisation simple de Denjoy en ce qu'elle considère uniquement des intervalles dyadiques (au lieu d'intervalles quelconques) et des fonctions bornées (au lieu de fonctions intégrables au sens de Lebesgue). L'exposé le plus complet de la totalisation simple et des autres totalisations de Denjoy se trouve dans le monumental ouvrage [3], dont les chapitres VII et VIII (pp. 327-481) sont consacrés aux totalisations, et le chapitre IX (pp. 483-595) à l'application aux séries trigonométriques.

La totalisation simple est un cas particulier de l'« intégrale de Riemann généralisée » de R. Henstock ([4], chap. 10). D'après Pacquement [5], l'intégrale de Henstock permet l'intégration des dérivées dyadiques, au sens précisé ici (le terme de « dérivée dyadique » est employé dans un sens tout différent par P. Butzer et ses collaborateurs). Voir également les travaux de V. A. Skvorcov, qui méritent une particulière attention [6], [7], [8], [9].

APPENDICE: DISTRIBUTION DE LA FONCTION f

THÉORÈME. *Pour qu'une mesure positive* μ *sur* $\mathbf{R}$ *soit la distribution d'une limite de martingale dyadique partout convergente (au sens de (3)) il faut et il suffit que l'on ait*

(8) $$\int_{\mathbf{R}} |y|\, d\mu(y) < \infty$$

ou

(9) $$\int_{\mathbf{R}-} |y|\, d\mu(y) = \int_{\mathbf{R}+} y\, d\mu(y) = \infty .$$

Preuve. Nous identifierons X et l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbf{R}$ où les points dyadiques autres que 0 et 1 sont dédoublés (voir (6) et (7)). Ainsi, une fonction continue sur X est une fonction continue sur $[0, 1]\backslash D$ (D est l'ensemble des points dyadiques) admettant des limites en 0 et en 1, et, en tout point de D autre que 0 et 1, une limite à droite et une limite à gauche. Considérons des cas de difficulté croissante

a) μ est portée par un intervalle $[a, b]$ et charge tout sous-intervalle de $[a, b]$. Soit f la fonction croissante sur $[0, 1]$ dont la distribution est μ. Comme f est continue sur $[0, 1]$, les espérances conditionnelles $f_n = E(f/\mathscr{T}_n)$ ($\mathscr{T}_n$ est la n-ième tribu dyadique) convergent uniformément vers f.

b) μ est portée par un intervalle $[a, b]$, et la fonction de répartition $\bar{\mu}(y) = \mu(-\infty, y)$ est dyadique sur les paliers (intervalles de constance) P_n. Elle est donc strictement croissante sur $[a, b]\backslash \cup P_n$ et applique cet ensemble dans $[0, 1]\backslash \cup \{p_n\}$, où $p_n \in D$. La fonction réciproque se prolonge en une fonction continue f sur X, et les espérances conditionnelles f_n convergent uniformément vers f sur X.

c) μ est portée par un intervalle $[a, b]$, et la fonction de répartition $\bar{\mu}(x)$ admet un palier unique P entre a et b, où sa valeur p n'est pas dyadique. Etant donné $\varepsilon > 0$, tel que $\varepsilon < \inf(p, 1-p)$, choisissons $p_1 \in D$ tel que $|p_1 - p| < \frac{\varepsilon}{2}$ et posons $p' = 2p - p_1$, puis choisissons $p_2 \in D$ tel que $|p_2 - p'| < \frac{\varepsilon}{2^2}$ et posons $p'' = 2p' - p_2$, et ainsi de suite. On obtient une suite $p_1, p_2, \dots p_n, \dots$ contenue dans D, convergente, telle que

(10) $$p = \sum_1^\infty p_n 2^{-n}$$

et

$$(11) \qquad |\lim p_n - p| < \varepsilon .$$

Désignons par ψ_n l'application de $[0, 1]$ sur $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ qui applique linéairement $[0, p]$ sur $[2^{-n}, 2^{-n}+p_n 2^{-n}]$ et $[p, 1]$ sur $[2^{-n}+p_n 2^{-n}, 2^{-n+1}]$, et désignons par φ_n l'application réciproque de ψ_n. Soit g la fonction croissante sur $[0, 1]$, définie et continue sauf en p, dont la distribution est μ. Chaque fonction $g \circ \varphi_n$ est prolongeable par continuité sur X, et sa fonction de répartition est $\psi_n(\bar{\mu}(.)-2^{-n})$. D'après (10) et (11) on a

$$(12) \qquad \sum_1^{\infty} \psi_n(\bar{\mu}(.)-2^{-n}) = \bar{\mu}(.)$$

$$(13) \qquad \lim 2^n \psi_n(\bar{\mu}(.)) = \psi(\bar{\mu}(.)) ,$$

où ψ est l'application de $[0, 1]$ sur lui-même qui applique linéairement $[0, p]$ sur $[0, \lim p_n]$ et $[p, 1]$ sur $[\lim p_n, 1]$. Posons

$$(14) \qquad f = \sum_1^{\infty} g \circ \varphi_n$$

et remarquons que les supports des $g \circ \varphi_n$ constituent une partition de $X \backslash \{0\}$. D'après (12) la distribution de f est μ. Pour $m \leqslant n$ l'espérance conditionnelle $f_m = E(f/\mathscr{T}_m)$ est constante sur $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ et égale à la valeur moyenne de $g \circ \varphi_n$, qui est

$$\int y \, d(\psi_n \circ \bar{\mu})(y) .$$

En posant

$$f(0) = \int y \, d(\psi \circ \bar{\mu})(y)$$

f est limite des f_m en tout point, y compris 0.

d) μ est portée par un intervalle $[a, b]$. Choisissons un dénombrable dense dans $[0, 1]$, contenant 0, 1, et toutes les valeurs de la fonction de répartition $\bar{\mu}(.)$ sur les paliers; soit Δ ce dénombrable. Fixons $0 < \varepsilon < 1$. Ordonnons Δ en commençant par 0 et 1, de façon quelconque ensuite, et définissons par induction suivant cet ordre une fonction γ_1 croissante sur Δ, appliquant Δ dans D, telle que $\gamma_1(0) = 0$, $\gamma_1(1) = 1$, et

$$(15) \qquad \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(p-q) \leqslant \gamma_1(p) - \gamma_1(q) \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(p-q)$$

pour tout couple (p, q) d'éléments de Δ tels que $p > q$. Soit Δ' l'image de Δ dans l'application $p \to p' = 2p - \gamma_1(p)$, puis γ_2 une fonction croissante sur Δ', appliquant Δ' dans D, avec $\gamma_2(0) = 0$, $\gamma_2(1) = 1$, et

$$(16) \qquad \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)(p'-q') < \gamma_2(p') - \gamma_2(q') < \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)(p'-q')$$

pour tout couple (p', q') d'éléments de Δ' tels que $p' < q'$, et ainsi de suite. Il résulte de (15) (en choisissant $q=0$), que

$$|p' - p| = |\gamma_1(p) - p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et de (16), en posant $p'' = 2p' - \gamma_2(p')$, que

$$|p'' - p'| < \frac{\varepsilon}{4}$$

et ainsi de suite. A chaque $p \in \Delta$ correspondent deux suites $p^{(n)}$ et $p_n = \gamma_n(p^{(n-1)})$, qui convergent vers une même limite $\gamma(p)$ telle que $|\gamma(p) - p| \leqslant \varepsilon$ et telle que (10) ait lieu. A partir de là on construit les fonctions continues ψ_n appliquant $[0, 1]$ sur $[2^{-n}, 2^{n+1}]$ de façon que, pour chaque $p \in \Delta$,

$$\Psi_n(p) = 2^{-n} + p_n 2^{-n},$$

les fonctions réciproques φ_n et la fonction f comme en (14). De nouveau f est limite d'une martingale dyadique et f admet μ pour distribution.

e) μ vérifie (8). Quitte à translater μ, supposons $\int y\, d\mu(y) = 0$. Décomposons μ en une somme

$$(17) \qquad \mu = \sum_1^\infty \mu_n,$$

chaque μ_n étant à support compact $[a_n, b_n]$, avec $\mu_n(\mathbf{R}) = 2^{-n}$ et

$$(18) \qquad \int y\, d\mu_n(y) = 0.$$

A la normalisation près, l'hypothèse d) est vérifiée pour μ_n. Il existe donc une fonction $f^{(n)}$ portée par $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$, limite de martingale dyadique, admettant μ_n pour distribution. Remarquons que la valeur moyenne de $f^{(n)}$ est 0. Posons

$$f = \sum_1^\infty f^{(n)}. \tag{19}$$

Alors f est limite de martingale dyadique et sa distribution est μ.

f) μ vérifie (9). On la décompose encore sous la forme (17), on définit les $f^{(n)}$ et f par (19). La condition est la même, et la totale de f, f_0, est nulle. En remplaçant 0 par α dans le second membre de (18) ce qui est possible à cause de l'hypothèse (9), on obtient $f_0 = \alpha$. Le théorème est démontré.

Remarquons que la totalisation de la fonction f nécessite une seule étape dans les cas a), b), c), d), et qu'elle est pratiquement terminée à l'étape ω (K^ω est réduit à $\{0\}$) dans les cas e) et f).

Dans le cas f) on peut introduire un « arbre de distribution » permettant le calcul de f_0. Il s'agit de l'arbre des mesures $\mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}$ qui sont les distributions de f sur les cellules $C(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Ainsi

$$\begin{cases} \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} = \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0} + \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 1} \\ \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}(C(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)) = \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}(X) = 2^{-n} \end{cases} \tag{20}$$

($n=0, 1, \ldots$; $\varepsilon_j=0$ ou 1). La condition (20) est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante. La théorie de la totalisation dyadique montre que se trouve nécessairement dans l'arbre une infinité de mesures à supports compacts; la première étape de la totalisation consiste à remplacer ces mesures par des mesures ponctuelles ayant même masse et même centre de gravité; dans le nouvel arbre, on recommence l'opération, et ainsi de suite, transfiniment au besoin, jusqu'à obtenir un arbre stationnaire. Cet arbre stationnaire décrit alors la martingale dyadique (au niveau n, on obtient la distribution de f_n). Il serait intéressant de connaître la caractérisation des arbres de distributions des limites de martingales dyadiques.

Citations et pastiche

1. Si une part de mon œuvre mathématique vient a sauver mon nom de l'oubli, sans doute resterai-je l'analyste qui le premier a trouvé les moyens d'intégrer toute dérivée et de calculer les coefficients de toute série trigonométrique convergente de somme donnée.

Arnaud Denjoy
Notice sur les travaux scientifiques,
Paris, Hermann, 1934 (p. 5)

2. Les théories les plus audacieuses des mathématiques récentes n'effrayaient nullement Painlevé. Il avait une aptitude admirable à les saisir, malgré toute leur nouveauté, et même à les résumer avec un bonheur d'expression auquel l'auteur lui-même n'aurait pas su atteindre. Quelqu'un lui exposait un jour, dans une conversation, l'économie d'une méthode d'intégration, procédant par une infinité d'étapes successives, chacune d'elles s'arrêtant à un ensemble-barrière, dont l'étape suivante enlève au moins un morceau. « Oui, tout y passe », répondit Painlevé qui suivait avec une attention et une lucidité parfaites les explications de son interlocuteur. Ce mot exprimait d'une façon merveilleusement compréhensive, et l'impossibilité qu'un irréductible noyau de résistance à la méthode se constituât, et l'achèvement nécessaire des opérations au terme accessible d'une chaîne de calculs.

Arnaud DENJOY
Hommes, forme et le nombre
Paris, Blanchard, 1964 (p. 87-88)

3. La dérivée dyadique est une forteresse. Elle a été construite, par des bâtisseurs géomètres, à partir d'un terre-plein de grande hauteur, suivant un plan dont on a perdu la trace; on ignore même la hauteur du terre-plein de départ. On sait seulement que les bâtisseurs procédaient par étapes et selon un système: au départ, ils ont divisé le terre-plein en deux parties égales, porté de la terre d'une partie sur l'autre et nivelé; sur chacun des niveaux ils ont procédé de même, et ainsi de suite, construisant ainsi, de plus en plus hauts, de plus en plus profonds, de plus en plus tourmentés, des tours et des fossés, des créneaux et des puits, des clochers, des ravins, un édifice fantastique joignant le ciel et les abîmes. Le totalisateur va démanteler la forteresse, et la ramener au terre-plein de départ. Pour cela, il s'attaque d'abord aux places les plus faibles, aux plages sur lesquelles le relief est borné et donc facile à niveler. Une fois nivelée chacune de ces plages, la forteresse est à peine entamée. Mais le nivellement qu'on vient d'opérer fait apparaître de nouvelles places faibles, que le totalisateur nivelle à leur tour. Ainsi de proche en proche, autour du cœur encore inviolé, des plateaux remplacent les morceaux abattus, s'agrandissant et s'enrichissant sans cesse de nouveaux décombres. A chaque étape, de nouveaux murs s'écroulent, le cœur de la forteresse se réduit. Mais si les bâtisseurs ont été habiles, ni mille ni mille milliards d'étapes ne suffisent à détruire ce qui reste. Tout l'art du totalisateur est alors de bien employer son temps. Accélérant son œuvre, il fait tenir une infinité d'étapes en une heure. L'heure

écoulée, s'il reste encore à faire il se donne une demi-heure pour une infinité de nouveaux assauts. Si cela ne suffit pas, encore un quart d'heure et ainsi de suite. Si, la seconde heure écoulée, quelque chose reste debout, il presse encore le rythme. Chaque attaque emportant un morceau, s'il les précipite comme il convient, rien ne résiste, tout y passe, il vient un instant où le dernier pan de mur s'effondre, et le nivellement est achevé.

RÉFÉRENCES

[1] Denjoy, A. Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue. *C. R. Acad. Sc. Paris 154* (1er avril 1912), 859-861.
[2] —— Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale. *C. R. Acad. Sc. Paris 154* (15 avril 1912), 1075-1078.
[3] —— *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique.* Cinq volumes. Paris, Gauthier-Villars, 1941-1949.
[4] Henstock, R. *Linear analysis.* Butterworth, 1967.
[5] Pacquement, A. Détermination d'une fonction au moyen de sa dérivée sur un réseau binaire. *C. R. Acad. Sc. Paris 284, A* (1977), 365-368.
[6] Skvorcov, V. A. (= Skvortsov, V. A.). On Haar series with convergent subsequences of partial sums. *Soviet Math. Dokl. 9* (1968), 1469-1471.
[7] —— Calcul des coefficients des séries de Haar partout convergentes (en russe). *Matemat. Sbornik 75* (1968), 349-360.
[8] —— Generalized integrals in the theory of trigonometric, Haar, and Walsh series. *Real Analysis Exchange 12* (1986-87), 59-62.
[9] —— A dyadic Henstock integral. *Real Analysis Exchange 14* (1988-89), à paraître.

(Reçu le 5 janvier 1988)

Jean-Pierre Kahane

Unité Associée CNRS 757
Université de Paris-Sud
Mathématiques — Bât. 425
91405 Orsay Cedex (France)