I. Problèmes relatifs aux notions fondamentales

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

jours possible ou bien de résoudre le problème, ou bien de démontrer qu'il ne comporte aucune solution.

Jamais mathématicien ne sera réduit à dire : *Ignorabimus*.

ÉNONCÉ DE QUELQUES PROBLÈMES

Nous voulons illustrer ce que nous venons de dire par quelques problèmes empruntés aux divers domaines des mathématiques, et qui nous semblent particulièrement propres à contribuer à l'avancement de notre science.

I. Problèmes relatifs aux notions fondamentales

1. *Problème de Cantor sur la puissance du continu.*

Chaque ensemble de nombre est équivalent ou bien à l'ensemble des nombres entiers rationnels, ou bien au continu.

Le premier pas à faire pour trouver la démonstration de ce théorème serait peut-être de résoudre le problème suivant :

Mettre le continu sous la forme d'un ensemble bien ordonné (*wohlgeordnete Menge*).

2. *Axiomes de l'Arithmétique.*

Trouver un système d'axiomes régissant et définissant les conceptions arithmétiques ;

Examiner si ces axiomes sont indépendants les uns des autres, et, *dans le cas contraire, mettre en évidence les parties communes*, de façon à obtenir un système d'axiomes complètement indépendants ;

Enfin *prouver que ces axiomes sont compatibles*, c'est-à-dire qu'une suite finie de déductions logiques partant de ces axiomes, ne peut jamais conduire à une contradiction.

Nous disons qu'une conception existe au point de vue mathématique, lorsque les axiomes qui la définissent sont compatibles. D'après cette définition, la solution du problème précédent ne serait autre chose que la démonstration de l'existence mathématique du continu. De là, nous serions peut-être conduits à établir de la même manière l'existence des ensembles de puissance transfinie supérieure.

3. *Axiomes de la Physique.*

Établir les systèmes d'axiomes du Calcul des probabilités, de la Mécanique rationnelle et des différentes branches de la Physique, puis fonder sur ces axiomes l'étude rigoureuse de ces sciences.

II. Problèmes empruntés a l'arithmétique et a l'algèbre

4. *Problème de Riemann sur les nombres premiers.*

Démontrer dans toute leur étendue les propositions formulées par Riemann sur la fonction $\zeta(s)$, en particulier la suivante :

La différence entre le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité x *et le logarithme intégral de cette quantité devient infinie avec* x *d'un ordre égal ou inférieur à* $\sqrt{x}$.

Etendre les propositions de Riemann à la fonction analogue $\zeta_k(s)$ *correspondant à un corps algébrique* k :

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{\{n(j)\}^s}$$

(n(j) désigne la norme de l'idéal j ; la somme s'étend à tous les idéaux j du corps).

5. *Certains nombres sont-ils transcendants ou du moins irrationnels ?*

Démontrer que la fonction $e^{i\pi z}$ *a une valeur transcendante, lorsque la variable* z *est algébrique irrationnelle.*

Examiner si les puissances a^β *ont toujours des valeurs transcendantes ou du moins irrationnelles, lorsque la base est un nombre algébrique et l'exposant un nombre algébrique irrationnel.* (Exemples : $2^{\sqrt{2}}$, $e^\pi = i^{-2i}$).

6. *Les solutions de l'équation du 7e degré ne peuvent pas s'obtenir par la Nomographie.*

La Nomographie permet de résoudre une équation lorsque les racines peuvent être obtenues par *une suite finie d'opérations ne portant que sur deux paramètres*. Il s'agit de *démontrer que l'équation générale du 7e degré ne rentre pas dans cette catégorie.*