§5. Les cas h = 1 et h = 2

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.05.2024**

Il n'est malheureusement pas possible de calculer $d(\varepsilon)$ car cet entier dépend de l'hypothétique grand discriminant exceptionnel pour lequel $h(-d)$ serait petit.

On peut cependant obtenir par les méthodes précédentes un énoncé « effectif à au plus une exception près ». Cela a été fait par Tatuzawa [1]) en explicitant les constantes dans la démonstration de Siegel: si $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, on a

$$(30) \qquad h(-d) \geqslant \frac{0{,}655}{\pi} \varepsilon d^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

pour $d > \sup(e^{1/\varepsilon}, e^{11,2})$ à au plus une exception près. On en déduit par exemple, en prenant $\varepsilon = 1/15$, que tous les discriminants fondamentaux $-d$ pour lesquels $h(-d) \leqslant 10$, *à au plus une exception près*, figurent dans la table de Buell et par suite sont de valeur absolue $\leqslant 13843$.

§ 5. Les cas $h = 1$ et $h = 2$ [2])

D'après le paragraphe précédent, il existe au plus un discriminant fondamental $-d$ tel que $h(-d) = 1$ et qui ne figure pas parmi les neuf déjà connus de Gauss. La question de savoir si un tel d existe est restée longtemps ouverte et est devenue célèbre sous le nom de *problème du dixième discriminant* (ou *du dixième corps quadratique imaginaire*).

En 1952, Heegner publie une preuve de la non-existence du dixième discriminant reposant sur la théorie des formes modulaires, mais cette preuve fut jugée incomplète à l'époque.

En 1966, Stark et Baker prouvent indépendamment la non-existence du dixième discriminant. Dans sa preuve, Stark ramène ce problème à la détermination des solutions entières des équations $8x^6 \pm 1 = y^2$ et $x^6 \pm 1 = 2y^2$. Ces équations apparaissent déjà dans le travail de Heegner. En fait, deux ans plus tard, Stark et Birch reprennent en détail les arguments de Heegner et montrent la validité de sa démonstration.

La méthode de Baker utilise les minorations effectives de formes linéaires en logarithmes de nombres algébriques. Elle a l'avantage de s'étendre au problème du nombre de classes 2, et a permis à Baker et Stark de majorer

---

[1]) T. Tatuzawa, *On a theorem of Siegel*, Jap. J. of Math., 21 (1951), 163-178.

[2]) Pour un exposé plus détaillé des questions abordées dans ce paragraphe, avec références bibliographiques, on pourra consulter par exemple l'exposé de M. Waldschmidt au Séminaire de Théorie des nombres de Paris en 1973 (exposé 12).

de façon effective les d pour lesquels $h(-d) = 2$; les bornes obtenues sont très grandes (Stark obtient par exemple $|d| < 10^{1100}$), mais Stark d'une part, Montgomery et Weinberger de l'autre, ont mis au point des méthodes qui permettent par un calcul sur ordinateur utilisant les zéros de la fonction zêta de Riemann (pour Stark) ou de séries $L(\chi, s)$ (pour Montgomery et Weinberger) de vérifier que, en dessous des bornes précédentes, tous les d pour lesquels $h(-d) = 2$ sont $\leqslant 427$.

Pour l'instant, aucune des méthodes précédentes n'a pu être appliquée au problème du nombre de classes h pour $h \geqslant 3$.

§ 6. Courbes elliptiques et fonctions L

Nous allons maintenant parler un peu des courbes elliptiques, car elles jouent un rôle fondamental dans la suite de l'histoire du problème de Gauss.

Considérons une équation de la forme

$$(W) \qquad y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6\,,$$

où les a_i sont dans $\mathbf{Q}$. La cubique projective E définie par l'équation homogène associée a un unique point à l'infini 0. Lorsque E est non singulière, on dit que E (ou plutôt que le couple $(E, 0)$) est une *courbe elliptique définie sur* $\mathbf{Q}$, et que (W) en est une *équation de Weierstrass*. Un changement de variables

$$(C) \qquad \begin{aligned} x &= u^2x' + r \\ y &= u^3y' + sx' + t \qquad (u, r, s, t \text{ dans } \mathbf{Q}, u \neq 0) \end{aligned}$$

conduit à une autre équation de Weierstrass (W') de E. On dit que l'équation (W) est *minimale* si les coefficients a_i sont entiers et si les équations (W') déduites de (W) par un changement de variables (C) avec u, r, s, t entiers et $u \neq \pm 1$, ne sont pas à coefficients entiers.

Une courbe elliptique E définie sur $\mathbf{Q}$ admet une équation minimale et toute autre équation minimale s'en déduit par un changement de variables (C) avec $u = \pm 1$ et r, s, t dans $\mathbf{Z}$.

Supposons désormais (W) minimale. Si l'on pose

$$\begin{aligned} X &= x + (a_1{}^2/12) + (a_2/3) \\ Y &= y + (a_1/2)x + (a_3/2)\,, \end{aligned}$$

l'équation (W) s'écrit $Y^2 = X^3 - (c_4/48)X - (c_6/864)$. Un calcul élémentaire montre que c_4, c_6 et $\Delta = (c_4{}^3 - c_6{}^2)/1728$ s'expriment comme polynômes