§4. La trace T

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Si la suite $f(1), \ldots, f(n)$ est décroissante, q est égal au cardinal de l'image de f diminué d'une unité, et p est égal à $n-1-q$. Comme de plus la base $B(\varphi)$ ne contient qu'une seule fonction décroissante, on vérifie aisément le lemme.

PROPOSITION 3-7. *Soit φ une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$ de poids $n = p + q$. Soient u et v deux éléments de Λ_p et Λ_q. Alors on a*

$$T_\varphi(uv) = \sum T_{\varphi'}(u) T_{\varphi-\varphi'}(v),$$

la sommation ayant lieu sur toutes les fonctions φ' de poids p, comprises au sens large entre 0 et φ.

Démonstration. Désignons par $H_p \times H_q$ l'image par l'application $\times$ de $H_p \otimes H_q$ dans H_n. Le module $M(\varphi)$ est isomorphe, en tant que $H_p \times H_q$-module à la somme directe des modules $M(\varphi') \otimes M(\varphi-\varphi')$, φ' appartenant à l'ensemble des fonctions de poids p et comprises entre 0 et φ. Soient x et y des représentants de u et v dans H_p et H_q. Comme la trace de $u \otimes v$ agissant sur $M(\varphi') \otimes M(\varphi-\varphi')$ est égal au produit de la trace de u agissant sur $M(\varphi')$ par la trace de v agissant sur $M(\varphi-\varphi')$, on obtient le résultat cherché.

COROLLAIRE 3-8. *Soit φ une fonction à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. Soit ε une bijection de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$. Alors les formes linéaires T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ sont égales.*

Démonstration. D'après le lemme 3-6 T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ prennent la même valeur sur les éléments c_n de Λ. D'après la proposition 3-7, si, pour tout φ, T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ prennent les mêmes valeurs en u et en v, elles prennent, pour tout φ, la même valeur en uv. On en déduit que T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ sont égales quel que soit φ.

Il en résulte que T_φ ne dépend que de la partition du poids n de φ en les nombres $\varphi(p)$. Cette partition est caractérisée par la suite finie $p_1, p_2, \ldots; p_i$ désignant le nombre de fois où φ prend la valeur i. On notera alors T_φ sous la forme T_u, où u est le mot $c_1^{p_1} c_2^{p_2} \ldots$.

§ 4. LA TRACE T

Soit $x = (x_i)$ une famille de symboles. On désignera par $A(x)$ l'algèbre des séries en les x_i à coefficients dans $K = \mathbf{Z}[\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \mu^{-1}]$. Un élément de

$A(x)$ est donc une combinaison linéaire finie ou infinie de monômes finis en les x_i, à coefficients dans K. En affectant à chaque x_i un degré 1, $A(x)$ devient une algèbre graduée. Si x et y sont deux familles de symboles, $A(x, y)$ désignera l'algèbre $A(z)$, z étant l'union disjointe des deux familles.

Le i-ième polynôme symétrique élémentaire en les variables x_i sera noté $c_i(x)$. L'algèbre des séries symétriques de $A(x)$ est donc l'anneau gradué des séries formelles $K[[c_1(x), c_2(x), \dots]]$, $c_i(x)$ étant affecté du degré i.

Soit x une famille de symboles indexée par $\mathbf{Z}$. Les éléments $c_i(x)$ seront notés c_i. On définit alors une application T de Λ dans $K[c_1, c_2, \dots]$ de la façon suivante:

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall u \in \Lambda_n, \quad T(u) = \sum_{\varphi} T_\varphi(u) \prod_i x_i^{\varphi(i)},$$

la sommation ayant lieu sur toutes les fonctions φ à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$.

Pour tout u de Λ_n, $T(u)$ est une série homogène de degré n et symétrique, c'est donc un polynôme homogène de degré n en les c_i.

THÉORÈME 4-1. *T est un morphisme de k-algèbres graduées de Λ dans $K[c_1, c_2, \dots]$ et les images par T des classes c_i de Λ sont données par la formule suivante:*

$$1 + (\lambda + \mu) \sum_{i>0} T(c_i) = \prod_i \frac{1 + \mu x_i}{1 - \lambda x_i} = \frac{1 + \mu c_1 + \mu^2 c_2 + \dots}{1 - \lambda c_1 + \lambda^2 c_2 - \dots}.$$

Démonstration. Il est clair que T est k-linéaire. Le fait que T respecte le produit est conséquence de la proposition 3-7. D'après le lemme 3-6, on a pour tout $n > 0$,

$$(\lambda + \mu) T(c_n) = \sum \lambda^{n-k} (\lambda + \mu)^k \prod_i x_i^{\varphi(i)},$$

la sommation ayant sur toutes les fonctions φ de poids n de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, k désignant le cardinal du support de φ.

Si a est un entier de $\mathbf{N}$, désignons par $\bar{a}$ le nombre qui vaut 0 ou 1 suivant que a est nul ou non. Le cardinal k du support de φ est donc égal à la somme des nombres $\overline{\varphi(i)}$ et l'on a

$$1 + (\lambda + \mu) \sum_{i>0} T(c_i) = \sum_{\varphi} \prod_i (1 + \mu\lambda^{-1})^{\overline{\varphi(i)}} (\lambda x_i)^{\varphi(i)},$$

la somme ayant lieu sur toutes les fonctions φ à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. Ce qui implique

$$1 + (\lambda+\mu) \sum_{i>0} T(c_i) = \prod_i \sum_{a\geqslant 0} (1+\mu\lambda^{-1})^{\bar{a}}(\lambda x_i)^a$$

$$= \prod_i \left(1+(1+\mu\lambda^{-1})\frac{\lambda x_i}{1-\lambda x_i}\right)$$

$$= \prod_i \frac{1+\mu x_i}{1-\lambda x_i} = \frac{1+\mu c_1+\mu^2 c_2+\dots}{1-\lambda c_1+\lambda^2 c_2-\dots} .$$

4-2. *Démonstration du théorème 1-5.* On sait déjà que l'algèbre Λ est engendrée par les classes c_i, $i > 0$. Or, modulo les décomposables de l'algèbre $K[c_1, c_2, \dots]$, on a

$$1 + (\lambda+\mu) \sum_{i>0} T(c_i) \equiv (1+\mu c_1+\mu^2 c_2+\dots)(1+\lambda c_1-\lambda^2 c_2+\dots)$$

$$\equiv 1 + (\lambda+\mu)c_1 + (\mu^2-\lambda^2)c_2 + (\mu^3+\lambda^3)c_3 + \dots$$

$T(c_i)$ est donc, modulo les décomposables de $K[c_1, c_2, \dots]$, un multiple non nul de c_i et les éléments $T(c_i)$ sont algébriquement indépendants. Il en est donc de même des classes c_i de Λ et Λ est la k-algèbre des polynômes en les variables c_i.

Il est possible de donner une forme assez concise de la trace T de la façon suivante. Soient x et y des familles de symboles. Si f est une série de l'anneau $A(x, y)$, symétrique en x et en y, f est une combinaison linéaire de monômes de la forme uv, u étant un monôme en les éléments $c_i(x)$ et v un monôme en les éléments $c_i(y)$. Si l'on remplace dans chacun de ces monômes, u par le monôme correspondant en les classes c_i et v par l'application $T_{v'}$ où v' est obtenu en remplaçant dans v chaque $c_i(y)$ par la classe c_i, on obtient une application linéaire de $K[c_1, c_2, \dots]$ dans lui-même que l'on notera $\hat{f}$.

THÉORÈME 4-3. *La trace T est égale à $\hat{f}$, f étant la série*

$$f = \prod_{ij} (1+x_i y_j) .$$

Démonstration. Par définition la trace T est égale à $\hat{f}$, avec

$$f = \sum_{\varphi} u(\varphi) \prod_i x_i^{\varphi(i)} ,$$

$u(\varphi)$ étant le monôme $c_1(y)^{p_1} c_2(y)^{p_2} \dots$ et p_i désignant le nombre de fois où φ prend la valeur i. C'est-à-dire que l'on a

$$u(\varphi) = \prod_i c_{\varphi(i)}(y) \quad \text{en convenant que } c_0(y) \text{ est égal à } 1 .$$

Et cela implique

$$f = \sum_{\varphi} \prod_{i} c_{\varphi(i)}(y) x_i^{\varphi(i)} = \prod_{i} \sum_{n>0} c_n(y) x_i^n = \prod_{i} \prod_{j} (1 + x_i y_j) .$$

§ 5. La trace de Jones-Ocneanu

On se propose ici de montrer les théorèmes 1-6 et 1-7.

5-1. Soit donc $\equiv$ une relation d'équivalence additive sur Λ possédant la propriété suivante:

(P) $\quad \forall n > 0, \forall u \in H_n, \quad t_n(u) \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n] \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}]$.

Comme σ_n^{-1} est égal à $\alpha\beta^{-1} - \beta^{-1}\sigma_n$, on a

$$t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}] = \alpha\beta^{-1} c_1 t_n(u) - \beta^{-1} t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n] .$$

D'autre part, l'application de H_n dans H_{n+1} qui à u associe $(ux1_1)\sigma_n$ induit l'application θ de E_{n-1} dans E_n (voir 3-2). La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0, \forall u \in E_{n-1}, \quad f(u) \equiv f(\theta u) \equiv \alpha\beta^{-1} c_1 f(u) - \beta^{-1} f(\theta u) ,$$

c'est-à-dire

$$\forall u \in E , \quad f(u) \equiv f(\theta u) \quad \text{et} \quad (1 + \beta - a c_1) f(u) \equiv 0 ,$$

f désignant la projection canonique de E sur Λ.

D'autre part, E est un Λ-module libre de base $(s_0, s_1, s_2, ...)$ et l'on a

$$\forall n > 0 , \quad \theta s_n = s_{n+1} \quad \text{et} \quad f(s_n) = c_{n+1} .$$

La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0 , \quad \forall u \in \Lambda , \quad u c_n \equiv u c_{n+1} \quad \text{et} \quad u c_n (1 + \beta - \alpha c_1) \equiv 0 ,$$

et la plus petite relation $\equiv$ vérifiant la propriété (P) est donc la congruence modulo l'idéal J de Λ engendré par les éléments

$$c_n - c_1 , \quad n > 1 \quad \text{et} \quad c_1(1 + \beta - \alpha c_1) ,$$

ce qui achève de démontrer le théorème 1-6.

5-2. Soit τ une tresse de $B_n, n > 0$. La classe de $t_n(\tau)$ modulo l'idéal I_0 de Λ engendré par les éléments $c_i - c_1$ est de la forme cP, où c représente