# 1. Rappels sur les extensions

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.04.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 83-105

# EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES

par Pierre-Paul GRIVEL

## INTRODUCTION

Soit $M$ et $N$ deux modules à gauche sur un anneau $R$. Il est bien connu que le groupe $\mathrm{Ext}^n_R(N;M)$ classe, à équivalence près, les $n$-extensions de $M$ par $N$.

D'autre part soit $G$ un groupe et $A$ un groupe abélien sur lequel $G$ agit à gauche. On définit le $n$-ième groupe de cohomologie de $G$ à coefficients dans $A$ comme étant le groupe $H^n(G;A) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A)$ où $\mathbf{Z}$ est considéré avec sa structure de $\mathbf{Z}G$-module trivial; autrement dit on définit les groupes $H^*(G;A)$ comme étant les dérivés du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A) = A^G$.

Pour calculer ces groupes on utilise en général un complexe standard, à l'aide duquel on obtient une interprétation des premiers groupes de cohomologie.

Il paraissait intéressant d'obtenir directement l'interprétation de $H^1(G;A)$ et $H^2(G;A)$ à partir de l'interprétation de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A)$ et $\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A)$, sans avoir recours au complexe standard.

## 1. RAPPELS SUR LES EXTENSIONS

1.1. Soit $R$ un anneau. Soit $M$ et $N$ deux $R$-modules à gauche. Une $n$-extension de $M$ par $N$ est une suite exacte de $R$-modules

$$\xi: 0 \to M \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_n \xrightarrow{\alpha_n} N \to 0\,.$$

Deux $n$-extensions $\xi$ et $\xi'$ de $M$ par $N$ sont élémentairement équivalentes s'il existe $n$ morphismes de $R$-modules $\gamma_i: E_i \to E'_i$ tels que $\gamma_1\alpha = \alpha'$, $\alpha'_i\gamma_i = \gamma_{i+1}\alpha_i$ pour $i = 1, 2, ..., n-1$, et $\alpha'_n\gamma_n = \alpha_n$, ou $n$ morphismes de $R$-modules $\gamma'_i: E'_i \to E_i$ tels que $\gamma'_1\alpha' = \alpha$, $\alpha_i\gamma'_i = \gamma'_{i+1}\alpha'_i$ pour $i = 1, 2, ..., n-1$, et $\alpha_n\gamma'_n = \alpha'_n$.

Deux $n$-extensions $\xi$ et $\xi'$ de $M$ par $N$ sont alors équivalentes s'il existe une suite d'équivalences élémentaires reliant $\xi$ à $\xi'$.

On remarquera que dans le cas $n = 1$ l'équivalence élémentaire est déjà une relation d'équivalence car le morphisme $\gamma$ est alors un isomorphisme.

On notera $[\xi]$ la classe d'équivalence de l'extension $\xi$.

1.2. Soit $\xi$ une $n$-extension de $M$ par $N$. Soit $u: M \to M'$ et $v: N' \to N$ deux morphismes de $R$-modules.

Par produit cofibré on définit l'extension $u\xi$ de $M'$ par $N$ et par produit fibré on définit l'extension $\xi v$ de $M$ par $N'$.

1.3. Soit $\xi$ et $\xi'$ deux $n$-extensions de $M$ par $N$. Notons $\nabla: M \oplus M \to M$ l'application codiagonale définie par $\nabla(m_1; m_2) = m_1 + m_2$ et $\Delta: M \to M \oplus M$ l'application diagonale définie par $\Delta(m) = (m; m)$. La somme de Baer de $[\xi]$ et $[\xi']$ est définie en posant $[\xi] + [\xi'] = [\nabla(\xi \oplus \xi')\Delta]$.

Muni de cette opération l'ensemble des classes d'équivalence des $n$-extensions de $M$ par $N$ est un groupe abélien.

1.4. Il est bien connu que les classes d'équivalence des $n$-extensions de $M$ par $N$ sont classées par le $n$-ième foncteur dérivé $\mathrm{Ext}^n_R(N; M)$ du foncteur $\mathrm{Hom}_R(N; M)$.

1.5. Considérons maintenant un groupe $G$ et un groupe abélien $A$.

Une extension de $A$ par $G$ est une suite exacte de groupes

$$\xi: 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1 .$$

Si $\xi$ et $\xi'$ sont deux extensions de $A$ par $G$ alors $\xi$ est équivalente à $\xi'$ s'il existe un morphisme de groupe $\gamma: E \to E'$ tel que $\gamma\lambda = \lambda'$ et $\mu'\gamma = \mu$. On notera $[\xi]$ la classe d'équivalence de l'extension $\xi$.

1.6. Si $\xi$ est une extension de $A$ par $G$ on définit un morphisme de groupes $\theta: G \to \mathrm{Aut}\,(A)$ en posant, pour tout $g \in G$ et $a \in A$,

$$\lambda\theta(g)\,(a) = s(g)\lambda(a)s(g)^{-1}$$

où $s: G \to E$ est une section ensembliste de $\mu$. Ainsi le groupe abélien $A$ est muni d'une structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche.

1.7. Si le groupe $A$ est déjà muni d'une structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche on désignera par $e(G; A)$ l'ensemble des classes d'équivalence des extensions de $A$ par $G$ telles que l'action de $G$ sur $A$ induite par l'extension soit égale à l'action donnée de $G$ sur $A$.

L'ensemble $e(G;A)$ n'est pas vide car il contient la classe d'équivalence de l'extension

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} A \times G \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

donnée par le produit semi-direct.

1.8. Muni de la somme de Baer l'ensemble $e(G;A)$ a une structure de groupe abélien.

1.9. L'extension donnée par le produit semi-direct est scindée. Si $\sigma: G \to A \times G$ est une section de $\pi$ on a nécessairement $\sigma(g) = (f_\sigma(g);g)$ où $f_\sigma(g) \in A$. Soit $\sigma_1$ et $\sigma_2$ deux sections de $\pi$; on dit que $\sigma_1$ est $A$-conjuguée à $\sigma_2$ s'il existe un élément $a \in A$ tel que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma_1(g) = \iota(a)\sigma_2(g)\iota(a)^{-1}$. On notera $[\sigma]$ la classe de $A$-conjugaison de la section $\sigma$ et on désignera par $h(G;A)$ l'ensemble des classes de $A$-conjugaison des sections de $\pi$.

1.10. Si $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont deux sections de $\pi$ on définit la section $\sigma_1 + \sigma_2$ en posant $(\sigma_1+\sigma_2)(g) = (f_{\sigma_1}(g)+f_{\sigma_2}(g);g)$. Cette opération induit sur $h(G;A)$ une structure de groupe abélien.

## 2. Dérivations et extensions

2.1. Soit $G$ un groupe. L'anneau de groupe $\mathbf{Z}G$ est muni d'une augmentation $\varepsilon: \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ donnée par $\varepsilon(\sum_{g\in G} n_g\, g) = \sum_{g\in G} n_g$. Si on considère $\mathbf{Z}$ avec sa structure de $\mathbf{Z}G$-module trivial à gauche, $\varepsilon$ est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-module et on obtient une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

où l'idéal d'augmentation $IG$ est engendré, comme $\mathbf{Z}$-module, par l'ensemble $\{g-1 \mid g \in G\backslash\{1\}\}$.

2.2. Soit $A$ un $\mathbf{Z}G$-bimodule.

Une dérivation de $G$ dans $A$ est une application $f: G \to A$ telle que, pour tout $g, h \in G$, on ait $f(gh) = f(g)\cdot h + g \cdot f(h)$.

L'ensemble des dérivations de $G$ dans $A$ forme un groupe abélien noté $\mathrm{Der}\,(G;A)$.

Pour tout $a \in A$, l'application $f_a: G \to A$ définie par $f_a(g) = g\cdot a - a\cdot g$ est une dérivation, appelée dérivation intérieure de $G$ dans $A$.