§2. Fonctions zêta

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

-163. D'après le début de ce paragraphe, on a $r_n(-163) = 0$ pour $2 \leqslant n \leqslant 40$. Par suite, -163 n'est un carré modulo aucun des nombres premiers $\leqslant 39$, et le corollaire au théorème ci-dessus implique que si $r_n(-163) \neq 0$ et $n < 41^2$, nécessairement n est premier. Ceci explique pourquoi la suite (découverte par Euler): 41, 43, 47, 53, 61, ..., formée par les valeurs de $x^2 + x + 41$ pour $x \geqslant 0$ ne comporte que des nombres premiers jusqu'à 1601 $(= 39^2 + 39 + 41)$.

§ 2. FONCTIONS ZÊTA

Il est fructueux de réinterpréter les résultats du paragraphe précédent en introduisant des *séries de Dirichlet génératrices*: pour toute forme quadratique q de discriminant $-d$, la série de Dirichlet

$$\zeta(q, s) = \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} q(u, v)^{-s} \tag{16}$$

converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et l'on a

$$\zeta(q, s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} r_n(q) n^{-s} \tag{17}$$

où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ est la fonction zêta de Riemann. Comme $\zeta(q, s)$ ne dépend que de la classe C de q, on l'écrit aussi $\zeta(C, s)$.

La fonction $\zeta(q, s)$ jouit de remarquables propriétés analytiques: la fonction

$$\Lambda(q, s) = 2d^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta(q, s) \tag{18}$$

admet un *prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$, avec pour seuls pôles des *pôles simples en* 0 *et* 1 de résidus -1 et 1, et vérifie *l'équation fonctionnelle* $\Lambda(q, 1-s) = \Lambda(q, s)$. En effet, la fonction thêta

$$\theta(q, t) = \sum_{(n,m) \in \mathbf{Z}^2} \exp\left(-q(n, m) 2\pi t/\sqrt{d}\right) \tag{19}$$

satisfait d'après la formule sommatoire de Poisson à l'équation fonctionnelle

$$\theta(q, t^{-1}) = t\theta(q, t)\,; \tag{20}$$

on a, par échange de la somme et de l'intégrale,

$$\Lambda(q, s) = \int_0^{\infty} [\theta(q, t) - 1]\, t^{s-1} dt\,, \tag{21}$$

et l'on en déduit l'expression suivante de $\Lambda(q, s)$, sur laquelle le prolongement méromorphe, les pôles et leurs résidus, et l'équation fonctionnelle sont évidents

$$\Lambda(q, s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty [\theta(q, t)-1]\,(t^{s-1}+t^{-s})dt\,. \tag{22}$$

Soit K le corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q} + \mathbf{Q}i\sqrt{d}$. On peut déduire du dictionnaire entre formes quadratiques de discriminant $-d$ et $\mathcal{O}(-d)$-idéaux fractionnaires (I., § 4) que l'on a

$$\zeta_K(s) = \sum_{C \in Cl(-d)} \zeta(C, s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} r_n(-d)n^{-s} \tag{23}$$

où ζ_K est la fonction zêta du corps K (définie par $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N\mathfrak{a}^{-s}$, où $\mathfrak{a}$ parcourt l'ensemble des idéaux non nuls de l'anneau $\mathcal{O}(-d)$. Cette fonction ζ_K jouit de propriétés analytiques analogues à celles des fonctions $\zeta(C, s)$: en particulier, d'après ce qui précède, elle a un pôle simple en 1 de résidu

$$\operatorname{Res}_{s=1} \zeta_K(s) = \pi d^{-1/2} h(-d)\,. \tag{24}$$

Cette formule joue un rôle fondamental pour l'étude de $h(-d)$ par voie analytique.

Notons χ le caractère de Dirichlet $n \mapsto \left(\frac{-d}{n}\right)$. Le théorème de Gauss du § 2, ou plutôt son corollaire, traduit alors l'égalité entre séries de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(-d)n^{-s} = \prod_{p \text{ premier}} \left(\frac{1+p^{-s}}{1-\chi(p)p^{-s}}\right) \tag{25}$$

ou encore, compte tenu de (24), l'égalité

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(\chi, s) \tag{26}$$

où $L(\chi, s)$ est la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}$. Cette égalité équivaut à la décomposition de ζ_K en produit eulérien, décomposition que l'on prouve de nos jours directement en utilisant la factorisation des idéaux dans l'anneau de Dedekind $\mathcal{O}(-d)$.

En utilisant (25) et (26), nous allons reformuler le principe énoncé à la fin du paragraphe précédent.

PRINCIPE. *Supposons d grand et $h(-d)$ petit. Alors, on a $\chi(p) = -1$ pour la plupart des petits nombres premiers p. Si $\lambda\colon \mathbf{N} - \{0\} \to \{-1, 1\}$ est la fonction qui à un produit de r nombres premiers (non nécessairement* *distincts) associe* $(-1)^r$, *on a* $\lambda(n) = \chi(n)$ *pour la plupart des petits nombres entiers* n. *La fonction* $\zeta_K(s)$ *doit ressembler à la fonction* $\zeta(2s)$.

Ces énoncés sont volontairement vagues. Les rendre précis est souvent le nœud des démonstrations de minorations de $h(-d)$ lorsque d tend vers ∞.

§ 3. Ce que l'on espère sur le comportement de $h(-d)$

On peut montrer que *en moyenne* (en un sens qui demande à être précisé, ce que je ne ferai pas ici), $h(-d)$ est équivalent à une constante non nulle fois $\sqrt{d}$; déjà Gauss connaissait ce type de résultat [1]).

Il n'est pas vrai par contre que $h(-d)/\sqrt{d}$ admette un minorant > 0 ou un majorant lorsque d tend vers $+\infty$: on sait par exemple que $h(-d)/(\sqrt{d} \log \log d)$ ne tend pas vers 0 et que $h(-d) \log \log d/\sqrt{d}$ ne tend pas vers $+\infty$ lorsque d tend vers $+\infty$.

On obtient cependant de façon élémentaire des *majorations* raisonnables de $h(-d)$ (raisonnable signifiant avec l'exposant $\frac{1}{2}$ que l'on attend pour d), de la forme $h(-d) \leqslant C\sqrt{d} \log d$. Par exemple:

Proposition. *On a pour* $d > 4$

$$h(-d) \leqslant \pi^{-1}\sqrt{d} \log d \,. \tag{27}$$

Compte tenu de (24) et (26), il revient au même de montrer que l'on a, en posant $\chi(n) = \left(\frac{-d}{n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n \leqslant \log d \,.$$

Or, pour tout nombre réel $x > 0$, la somme $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n)$ est majorée par $N(x) = \inf([x], [(d-1)/2])$, et l'on a donc, en intégrant par parties

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} = \int_{1^-}^{\infty} \frac{dM(x)}{x} = \int_{1}^{\infty} \frac{M(x)}{x^2} dx \leqslant \int_{1}^{\infty} \frac{N(x)}{x^2} dx$$
$$= \int_{1^-}^{\infty} \frac{dN(x)}{x} = \sum_{n \leqslant [(d-1)/2]} 1/n \leqslant \log d \,.$$

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 302.