II. La boule unité de L(E)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Par conséquent $\mathscr{G}_p$ est un sous-ensemble borné de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$, normé par

$$\| u \| = \sup_{\| x \| = 1} \| u(x) \| .$$

LEMME 2. *Pour tout groupe compact* $\mathscr{G}$ *contenu dans* $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, *il existe une forme quadratique* Φ, *à valeurs strictement positives hors de* 0, *et invariante par* $\mathscr{G}$.

Démonstration. Soit μ la mesure de Haar du groupe $\mathscr{G}$, et φ une forme quadratique, à valeurs > 0 hors de 0; en posant $\Phi = \int_{\mathscr{G}} \varphi \circ u d\mu(u)$, on définit une forme quadratique qui a les propriétés requises.

D'une autre façon, on peut appliquer un théorème démontré par Hochschild ([4], XV 3-1): G_1 étant la composante connexe de l'élément neutre du groupe de Lie G, on suppose G/G_1 fini; il existe alors un sous-groupe compact K, tel que tout autre sous-groupe compact de G soit contenu dans un conjugué de K; dans le cas présent on prend $G = GL(n, \mathbf{R})$, et le rôle de K peut être joué par $O(n)$ qui en est un sous-groupe compact maximal.

II. La boule unité de $\mathscr{L}(E)$

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, muni d'une norme N, et $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E muni de la norme $\mathscr{N}$ des opérateurs:

$$\mathscr{N}(u) = \sup_{N(x) = 1} N \circ u(x) .$$

Soit $\mathscr{B}_N$ la boule unité fermée de $\mathscr{L}(E)$.

LEMME 1. *Soit* N *non euclidienne,* $\mathscr{G}_N$ *l'ensemble des isométries linéaires pour* N, $\mathscr{K}_N$ *l'enveloppe convexe fermée de* $\mathscr{G}_N$. *Alors l'inclusion* $\mathscr{K}_N \subset \mathscr{B}_N$ *est stricte.*

Démonstration. Le choix d'une base de E permet de se ramener à la situation du paragraphe I, et de prouver l'existence d'une forme quadratique > 0 hors de 0, invariante par $\mathscr{G}_N$. Munissons E de la structure euclidienne définie par cette forme quadratique; de cette façon $\mathscr{G}_N$ est contenu dans le groupe des isométries euclidiennes de E

Par ailleurs posons $B_N = \{x \in E \mid N(x) \leqslant 1\}$; si B_N était une boule euclidienne, la norme N serait proportionnelle à la norme euclidienne de E, et serait elle aussi euclidienne.

Il existe donc deux éléments de E, notés x_1 et x_2, tels que $N(x_1) = N(x_2) = 1$, et que x_1 et x_2 soient de normes euclidiennes distinctes; x_1 et x_2 engendrent un espace vectoriel F de dimension 2, et $B_N \cap F$ n'est pas un « disque ». Nous allons montrer par l'absurde que $B_N \cap F$ admet en au moins un point x_0 une droite d'appui D_0 (voir [2] § 5, déf. 3) non orthogonale à x_0.

Si ce n'était pas le cas, la frontière du convexe $B_N \cap F$ pourrait alors être définie par une équation polaire du type $\rho = f(\theta)$, où f serait dérivable par suite de l'unicité de la droite d'appui (voir [9]); mais cette droite d'appui étant orthogonale au « rayon », on aurait nécessairement $f'(\theta) = 0$ pour tout θ, donc $f(\theta)$ constante, ce qui contredit le fait que x_1 et x_2 sont de normes euclidiennes distinctes.

L'existence de x_0 est donc établie; en vertu du théorème de Hahn Banach (voir [2] § 5), B_N admet en x_0 un hyperplan d'appui H_0 contenant D_0, donc non orthogonal à x_0 (notons que H_0 peut ici être construit par récurrence puisque la dimension de E est finie). Par symétrie, B_N admet en $-x_0$ un hyperplan d'appui parallèle à H_0.

Soit v la projection de E sur $\mathbf{R}x_0$, parallèlement à H_0. On a $v(B_N) \subset B_N$, donc $\mathcal{N}(v) = 1$, et $v \in \mathcal{B}_N$. Par ailleurs $\| v \| = \sup\limits_{\| x \| \leqslant 1} \| v(x) \| > 1$, car v augmente strictement la norme euclidienne de tout vecteur non nul orthogonal à H_0. Nous allons montrer que v appartient à $\mathcal{B}_N \backslash \mathcal{K}_N$.

Remarquons d'abord que $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2, et donc tout élément de $\mathcal{K}_N$ peut s'exprimer comme barycentre d'au plus $n^2 + 1$ éléments de $\mathcal{G}_N$ (théorème de Carathéodory, [2] § 2 exercice 9).

Si l'on avait $v \in \mathcal{K}_N$, il existerait alors

$$\begin{cases} v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathcal{G}_N \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in]0, 1[\end{cases} \qquad (m \leqslant n^2 + 1)$$

tels que $v = \sum\limits_1^m \alpha_i v_i$ et $1 = \sum\limits_1^m \alpha_i$. Chaque v_i est une isométrie euclidienne (inclusion de $\mathcal{G}_N$); on aurait donc

$$1 < \| v \| \leqslant \sum_1^m \alpha_i \| v_i \| = \sum_1^m \alpha_i = 1 \,; \qquad \text{d'où la contradiction} .$$

Lemme 2. *Munissons E d'une norme euclidienne; soit $\mathcal{B}$ la boule unité qu'on en déduit dans $\mathcal{L}(E)$. Alors tout élément extrémal* ([2] § 7, déf. 1) *de $\mathcal{B}$ est une isométrie euclidienne de E.*

Démonstration. On suppose le résultat acquis pour la dimension $n - 1$; soit $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que $\| u \| = 1$, mais que u ne soit pas une isométrie. Il existe $x_1 \in E$, tel que $\| u(x_1) \| = \| x_1 \| > 0$; composant u avec une rotation, on se ramène au cas où $u(x_1) = x_1$.

L'orthogonal V de x_1 est stable par u; en effet pour $y \in V$ et $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\| u(x_1 + ty) \|^2 \leqslant \| x_1 + ty \|^2,$$

c'est-à-dire

$$\| u(x_1) \|^2 + 2t(x_1 \,|\, u(y)) + t^2 \| u(y) \|^2 \leqslant \| x_1 \|^2 + t^2 \| y \|^2,$$

d'où $(x_1 \,|\, u(y)) = 0, \quad u(y) \in V, \quad u(V) \subset V$.

Mais la restriction de u à V n'est pas une isométrie (car alors u en serait une). D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$u\,|_V = (u_1 + u_2)/2, \qquad \text{où} \qquad u_1 \neq u_2 \qquad \text{et} \qquad \| u_1 \| = \| u_2 \| = 1.$$

On peut prolonger u_1 et u_2, de V à E, en $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2 \in \mathcal{B}$ tels que les restrictions de $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2$ à $\mathbf{R}x_1$ soient l'identité. Comme $u = (\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2)/2$ et $\tilde{u}_1 \neq \tilde{u}_2$, u n'est pas un point extrémal de $\mathcal{B}$.

Désormais pour tout convexe A, on note ∂A l'ensemble des éléments extrémaux de A.

Théorème 1. *Soit E espace vectoriel réel de dimension finie. Alors*

1) *Pour toute norme N sur E, on a $\mathcal{G}_N \subset \partial \mathcal{B}_N$.*

2) *L'égalité $\mathcal{G}_N = \partial \mathcal{B}_N$, équivaut à l'assertion: N est euclidienne.*

Démonstration.

1) Soit $u \in \mathcal{G}_N$. Supposons que $u = (u_1 + u_2)/2$, avec u_1 et $u_2 \in \mathcal{B}_N$. Si B_N est la boule unité fermée de E, on a $u(\partial B_N) = \partial B_N$. Pour $x \in \partial B_N$, l'égalité $u(x) = (u_1(x) + u_2(x))/2$ implique $u_1(x) = u_2(x) = u(x)$. Les restrictions de u, u_1 et u_2 à ∂B_N sont identiques, donc $u = u_1 = u_2$, et finalement $u \in \partial \mathcal{B}_N$.

2) D'après le lemme 1 ci-dessus, on a $\partial \mathcal{B}_N \neq \mathcal{G}_N$ lorsque N n'est pas euclidienne. Inversement supposons N euclidienne; le lemme 2 permet d'écrire $\partial \mathcal{B}_N \subset \mathcal{G}_N$. Puisque, d'après 1), l'inclusion inverse a lieu, on en déduit $\partial \mathcal{B}_N = \mathcal{G}_N$.