Der relative Betrag der Volumenzuwachskomponente, welcher als Folge der Verschiebung der Massentarifkurve entsteht

Autor(en): **Emrovi, B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Forstwesen = Swiss foresty journal = Journal forestier suisse**

Band (Jahr): **119 (1968)**

Heft 9

PDF erstellt am: **15.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-765595

Der relative Betrag der Volumenzuwachskomponente, welcher als Folge der Verschiebung der Massentarifkurve entsteht

Von *B. Emrović*, Zagreb

Oxf. 56:62

1. *Annahme:* Das Volumen des Stammes als Funktion des Brusthöhendurchmessers (x) und der Totalhöhe des Stammes (h) kann durch die Gleichung von Schumacher-Hall

$$v = a\, x^b\, h^c \tag{1}$$

dargestellt werden, wo a, b, c Konstanten sind. (Anmerkung: Der Brusthöhendurchmesser ist mit x bezeichnet, weil der Buchstabe d für die Bezeichnung des Differentials benutzt wurde.)

2. *Annahme:* Die Familie der Massentarifreihen kann durch die allgemeine Gleichung

$$v = C \cdot F(x) \tag{2}$$

dargestellt werden, wo C der Faktor ist, der die Massentarifreihe bestimmt. Für $C = 1$ ergibt sich $v = F(x)$, das heißt die Gleichung der grundlegenden Massentarifkurve.

3. *Annahme:* Einer Familie der Massentarifreihen entspricht eine Familie der Standardhöhenkurven. Diese Familie der Höhenkurven kann mit der allgemeinen Gleichung

$$h = K \cdot f(x) \tag{3}$$

dargestellt werden, wo K der Faktor ist, der die Höhenreihe bestimmt. Für $K = 1$ ergibt sich $h = f(x)$, das heißt die Grundhöhenkurve, welche der grundlegenden Massentarifreihe entspricht.

4. Wenn wir in die Formel (1) die rechte Seite der Formel (3) einsetzen, dann folgt

$$v = a\, x^b\, K^c\, [f(x)]^c \tag{4}$$

Wenn wir die rechten Seiten der Formel (2) und (4) vergleichen, dann folgt

$$F(x) = a\, x^b\, [f(x)]^c \tag{5}$$

$$C = K^c \tag{6}$$

5. Das Volumen eines Stammes ist die Funktion der Zeit. Ebenso nehmen der Brusthöhendurchmesser und die Stammhöhe mit dem Alter zu. Bei dem theoretischen Plenterwald nimmt man an, daß der Durchmesser- und Höhenzuwachs sowie der daraus sich ergebende Volumenzuwachs so übereinstimmen, daß es im Laufe der Zeit weder zur Änderung der Höhenkurve noch der der Massentarifreihe kommt.

6. *Annahme:* $C = K^c$ = konstant und nicht von der Zeit (theoretischer Plenterwald) abhängig.

Der laufende Volumenzuwachs stellt die erste Derivation des Volumens nach der Zeit dar, das heißt

$$\dot{i}_v = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\, \dot{i}_x \tag{7}$$

Durch die Differenzierung der Gleichung (4) nach dem Durchmesser (x) folgt

$$\frac{dv}{dx} = a\, x^b\, K^c\, [f(x)]^c \left[\frac{b}{x} + c\,\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}\right] \tag{8}$$

Wenn wir die Gleichungen (4), (7) und (8) in Betracht ziehen, dann lautet der Volumenzuwachs in seinem relativen Betrag (unter der Annahme, daß keine Verschiebung der Massentarifkurve geschieht)

$$\frac{dv}{dt} \cdot \frac{1}{v} = \left[\frac{b}{x} + c\,\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}\right] \dot{i}_x \tag{9}$$

7. *Annahme:* Es besteht eine Verschiebung der Massentarifkurve, und diese Verschiebung ist die Folge der Verschiebung der Höhenkurve, das heißt der Faktor K in der Gleichung (4) ändert sich mit der Zeit $K = \varphi(t)$.

Dann ist der laufende Volumenzuwachs (Differenzierung der Gleichung [4] nach der Zeit)

$$\frac{dv}{dt} = c\, K^c\, \frac{1}{K} \cdot \frac{dK}{dt}\, a\, x^b\, [f(x)]^c +$$

$$+ K^c\, a\, x^b\, [f(x)]^c \left[\frac{b}{x} + c\,\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}\right] \frac{dx}{dt} \tag{10}$$

während der relative Betrag dieses Zuwachses

$$\frac{dv}{dt} \cdot \frac{1}{v} = \underbrace{c\,\frac{1}{K} \cdot \frac{dK}{dt}}_{B} + \underbrace{\left[\frac{b}{x} + \frac{c}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}\right] \dot{i}_x}_{A} \tag{11}$$

beträgt. Dieser relative Betrag des laufenden Volumenzuwachses besteht aus zwei Komponenten, und zwar:

Die Komponente A ist gleich dem Volumenzuwachs, den man unter der Annahme, daß der Faktor K konstant ist, erhält, das heißt, daß es keine Verschiebung der Höhenkurve und folglich keine Verschiebung der Massentarifkurve gibt (vergleiche mit der Gleichung [9]).

Daher ist die Komponente B die Folge der Verschiebung der Massentariflinie.

8. Durch die Differenzierung der Gleichung (3) nach der Zeit erhalten wir den laufenden Höhenzuwachs

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dK}{dt} f(x) + K \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{12}$$

während der relative Betrag des Höhenzuwachses

$$\frac{dh}{dt} \cdot \frac{1}{h} = \frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K} + \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{13}$$

ist, woraus der Ausdruck

$$\frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K} = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{1}{h} - \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{14}$$

folgt, mit dessen Hilfe man den relativen Zuwachs des Faktors K, der in der Formel (11) nötig ist, experimentell bestimmen kann.

9. Die Ausdrücke, welche für die rechte Seite der Formel (14) nötig sind, sollen durch Messungen ermittelt werden.

$\frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{1}{f(x)}$ = relativer Betrag der Derivation der Bestandshöhenkurve. Daher ist es nötig, im Bestande, welcher als Untersuchungsobjekt dient, zuerst eine genügende Anzahl der Stammhöhen (etwas mehr als bei Routinearbeit üblich) aufzunehmen und die Bestandshöhen graphisch zu konstruieren. Von der ausgeglichenen Höhenkurve ist es dann möglich, die Derivation der Höhenkurve für jeden Durchmesser graphisch (oder durch Ablesung der Differenzen vom Graphikon) zu ermitteln. Die ermittelten Beträge der Derivation sollen auf dasselbe Graphikon in etwas größerem Maßstab als die eingezeichneten Höhen aufgetragen und danach graphisch ausgeglichen werden. Durch Ablesung der Angaben von einem solchen Graphikon ist es dann möglich, den nötigen relativen Betrag der Derivation der Höhenkurve für jeden Brusthöhendurchmesser zu berechnen.

$\frac{dx}{dt} = i_x$ = Stärkenzuwachs, welchen man mit Preßlerschem Zuwachsbohrer aus der durchschnittlichen Ringbreite der letzten zehn Jahre ermitteln kann.

$\frac{dh}{dt} \cdot \frac{1}{h} = i_h \cdot \frac{1}{h}$ = relativer Betrag des Höhenzuwachses. Die nötigen Größen, das heißt der Höhenzuwachs (i_h) als ein Durchschnitt der letzten zehn Jahre und die gegenwärtige Höhe können leicht gemessen werden, wenn der Probestamm gefällt ist. Bei einigen Baumarten, welche jedes Jahr einen Astquirl bilden, könnte man den Höhenzuwachs mit einer optischen Methode auf noch stehendem Baum bestimmen und ebenso die Stammhöhe (unter Verwendung eines genaueren Hypsometers).

10. Der Betrag $\frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K}$ kann für jeden Stamm getrennt bestimmt werden, die Angaben jedoch können auch nach den Stärkestufen kumuliert und für jede Stärkestufe die Durchschnittsbeträge angewandt werden. Der nach der Formel (14) errechnete relative Zuwachs der Konstante K soll noch mit dem Parameter c aus der Formel von Schumacher-Hall (siehe Formel [11]) multipliziert werden. Wenn eine Lokalmassentafel mit zwei Eingängen besteht, welche nach der Formel von Schumacher-Hall ausgeglichen ist, dann soll dieser bekannte c-Parameter angewandt werden. Wenn jedoch die Lokalmassentafel auf eine andere Weise ausgeglichen wurde oder überhaupt nicht besteht, dann kann es zu keinem allzu signifikanten Fehler kommen, wenn man annimmt, dass $c = 1$.

11. Die berechneten Beträge $c\frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K}$ (für jeden Stamm getrennt oder im Durchschnitt für jede Stärkestufe) können nun als unabhängige (natürlich stochastische) Variable angesehen werden, die vom Durchmesser abhängig ist, und man schreitet fort zur Durchführung der Regressionsanalyse. Wenn die Ausgleichungslinie eine Gerade ist, deren Neigung sich von Null nicht signifikant unterscheidet, dann wird die Höhenkurve – und infolgedessen auch die Tariflinie – nur verschoben. Wenn jedoch die Regressionslinie eine geneigte Gerade oder eine Kurve darstellt, dann wird die Höhenkurve nicht nur verschoben, sondern es ändert sich auch ihre Form.

12. *Beispiel:* Im Lehrforstamt Zalesina, Unterabteilung VII-2c wurde 1958 eine Vollkluppierung durchgeführt. Mit Hilfe des Höhenmessers von Blume-Leiß wurden 944 Baumhöhen aufgenommen. Danach wurde auf graphischem Wege die Höhenkurve sowie die Kurve der Derivationen der Höhenkurve konstruiert. Dabei wurde auch eine Lokalmassentafel mit zwei Eingängen nach der Methode Schumacher-Hall

$$v = a \cdot x^b \cdot h^c = 10^{-4{,}230} \cdot x^{1{,}832} \cdot h^{1{,}069}$$

ausgearbeitet.

Im selben Jahr, das heißt 1958, hat man in dem erwähnten Bestand einen Hieb ausgeführt, und dabei wurden 231 gefällte Stämme vermessen.

Die Beträge $y = \frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K}$ wurden nach der Formel (14) für jeden Stamm getrennt berechnet, und auf das Graphikon als Ordinaten über dem Brusthöhendurchmesser als Abszisse aufgetragen. Man hat auch eine Regressions- und Korrelationsanalyse durchgeführt, mit

$$\bar{y} = 0{,}003\,76, \quad s_y = 0{,}002\,71, \quad s_{\bar{y}} = 0{,}000\,18$$
$$y = 0{,}006\,040 - 0{,}000\,050\,704\,x$$
$$s_{y/x} = 0{,}002\,641$$
$$r = -0{,}23$$

Der Korrelationskoeffizient wurde mit Hilfe der Null-Hypothesis geprüft, und es wurde festgestellt, daß ein bedeutsamer Unterschied von Null — mit 99 Prozent Wahrscheinlichkeit — besteht. In das Graphikon wurden auch die 99-Prozent-Vertrauensgrenzen eingezeichnet. Das heißt, daß die Höhenkurve sich ziemlich beträchtlich verschiebt, dabei jedoch auch ihre Form ändert und flacher wird. Die Ursache dieses Phänomens kann der Behandlungsweise des Bestandes in den letzten 50 Jahren zugeschrieben werden. Es handelt sich nämlich im gegebenen Fall um die Konversion aus einem annähernd gleichaltrigen Bestand in eine Art von Femelwald.

Vermittels der Meyerschen Methode der Tarifdifferenzen (der Massentarif ist mit Hilfe der Höhenkurve aufgrund der 944 vermessenen Höhen und der Lokalmassentafel mit zwei Eingängen konstruiert worden) hat man den Volumenzuwachs von 8,4 m^3/ha in bezug auf das Gesamtvolumen von 510 m^3/ha, das heißt mit 1,65 Prozent errechnet. Dieser Zuwachs von 1,65 Prozent, oder in der Verhältniszahl 0,0165, würde der Komponente A (siehe die Formel [11]) entsprechen, während der Durchschnittsbetrag der Größen $y = \frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K} \rightarrow \bar{y} = 0{,}0376$ ergeben würde. Wenn wir diesen Betrag mit dem Betrag des Parameters c aus der lokalen Schumacher-Hallschen empirischen Gleichung multiplizieren, dann ergibt sich: $0{,}0376 \cdot 1{,}069 = 0{,}0040$, das heißt die Verschiebung der Tarifkurve würde noch 0,4 Prozent des Volumens beibringen, so daß sich der Gesamtzuwachs auf 2,05 Prozent bzw. 10,4 m^3/ha belaufen würde, das heißt um 2,0 m^3/ha höher als mittels der Meyerschen Methode der Tarifdifferenzen gewonnen wurde. Daher kann die Zuwachszunahme infolge der Verschiebung der Tarifkurve (Komponente B), wie ersichtlich, beträchtlich sein, bei der routinemäßigen Arbeitsweise wird sie jedoch nicht berücksichtigt.

Résumé

La quantité relative de la composante de l'accroissement en volume due au déplacement de la courbe du tarif

A condition que le volume de la tige soit donné par l'équation (1) (Schumacher-Hall) et que la famille des courbes des hauteurs et la famille des courbes des tarifs correspondantes soient données par des équations générales (3) et (2), on obtient l'équation de la courbe du tarif (4). En dérivant cette équation par le temps et en la divisant par le volume, on obtient une quantité relative de l'accroissement en volume (11) qui est composé de deux composantes. La composante A représente une quantité relative de l'accroissement à condition qu'il n'y ait pas de déplacement de la courbe des hauteurs (voir l'équation [9]), alors que la composante B est la conséquence du déplacement de la courbe des hauteurs et par conséquent aussi du déplacement de la courbe du tarif.

En dérivant la formule (3) par le temps, on a obtenu l'équation (13), et de cette dernière on obtient l'équation (14) au moyen de laquelle on peut calculer l'accroissement relatif du facteur K, si les quantités nécessaires du côté droit de la formule (14) sont déterminées de manière expérimentale.

L'analyse de régression de la quantité $\frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K}$ par rapport au diamètre à 1,3 m (x) nous donnera une idée sur le caractère du déplacement de la courbe des hauteurs. Si la ligne de régression est une droite parallèle à l'axe x, la courbe des hauteurs n'est que déplacée; si au contraire la droite est inclinée ou s'il s'agit d'une courbe, alors la courbe des hauteurs, outre son déplacement, change aussi de forme.