Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Forstwesen = Swiss foresty journal = Journal forestier suisse

Herausgeber: Schweizerischer Forstverein

Band: 103 (1952)

Heft: 9-10

Artikel: Mathematische Formulierung des Gesetzes für Wachstum und Zuwachs der Waldbäume und Bestände

Autor: Michajlow, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-765680

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

forestières sur ces stations extrêmes des observations souvent surprenantes et propres à esquisser une méthode de reboisement. Le robinier convient le mieux; il est là l'essence pionnier idéale. On le plante en brins d'un ou deux ans, sur des sols en repos depuis un an, environ 5000 à 10 000 plants par ha. On peut lui adjoindre de l'aulne blanc, du peuplier, du pin, si possible du tremble et du saule. Au bout de quelques années la plantation d'érable, de frêne ou de charme sous les robiniers devient possible. Il faut utiliser des plants bien enracinés de sortes accoutumées à l'aridité; pour les opérations de culture, seuls les soins les plus minutieux suffisent. Dans les endroits les plus hostiles, on ne crée que des bouquets de plantes. L'emploi de buissons des forêts riveraines naturelles et de l'argousier faux nerprun a échoué, probablement à cause des dégâts provoqués par la transplantation. Par contre, le peuplier, planté en brin bien enraciné, a résisté à la sécheresse d'une manière inattendue. On a par chance obtenu une provenance adéquate. *J.-B. C.*

Mathematische Formulierung des Gesetzes für Wachstum und Zuwachs der Waldbäume und Bestände

Von Dr. *J. Michajlow,* o. Prof. an der Universität Skopje
(V. R. Mazedonien-Jugoslawien)

(56:57)

1. Einleitung

Unter dem Wachstum eines Organismus versteht man Veränderungen, welche an der Größe und dem Gewicht desselben entstehen im Verlauf eines Teiles seiner Lebenszeit. Das Wachstum ist ein eng mit der Zeit verbundenes Ereignis. Es beginnt im Moment der ersten Erscheinung eines Organismus und dauert an, solange dafür günstige Umstände bestehen. Es ist interessant, festzustellen, daß sich das Wachstum in allen Gebieten der organischen Welt nicht auf verschiedene Art abwickelt, sondern denselben charakteristischen Verlauf aufweist. Wie das Wachstum bei ganzen Organismen verläuft, so vollzieht es sich auch bei getrennten Organen resp. bei ihren einzelnen Zellen. Das bestätigt uns, daß der Verlauf des Wachstums eines Organismus einem allgemeinen Gesetze untersteht. Die mathematische Formulierung dieses Gesetzes ist eine wichtige Aufgabe der Forstleute, Landwirte und Biologen.

Während die mathematische Formulierung des Wachstumsgesetzes für einige Gebiete von mehr theoretischem Interesse ist, hat sie für die Forstwirtschaft, wo die Zeit ein sehr wichtiger Produktionsfaktor darstellt, vor allem für die Praxis große Bedeutung.

Das Wachstumsgesetz, in passender Form ausgedrückt als Zeitfunktion, kann uns bei Aufstellung von Ertragstafeln behilflich sein. In letzter Zeit finden die Wachstumsfunktionen auch Anwendung bei der

Lösung anderer Probleme aus dem Gebiete der Forstwissenschaft und -praxis. So hat zum Beispiel Prof. Dr. Levakowitsch[1] die Konstanten einer von ihm entworfenen Wachstumsfunktion für das numerische Bonitieren von Beständen angewendet. Meiner Meinung nach ließe sich eine passende Wachstumsfunktion mit noch größerem Erfolg ausnützen bei einer numerischen Untersuchung des Wachstums und Zuwachses verschiedener Waldbäume und Bestände.

Eine Wachstumskurve stellt uns den Gang des Wachstums dar. Sie illustriert das Wachstumsgesetz. Seit mehr als hundert Jahren ist ihre allgemeine Form in der Forstwissenschaft bekannt. Zahlreiche Stammanalysen sowie langjährige Beobachtungen des Entwicklungsganges von Beständen zeigten, daß die Wachstumskurven eine S-Form haben.

Die Wachstumskurve beginnt im Koordinatenausgangspunkt, verläuft tangential zur Abszisse aufwärts, erreicht einen Wendepunkt und geht nachher in Konkavform über; im Unendlichen wird sie parallel zur Abszisse.

Der allgemeine Charakter der Wachstumskurven ist aus Abb. 1 ersichtlich, das die Höhenwachstumskurven der Fichte von Tirol nach Zahlenangaben von Guttenberg[2] darstellt.

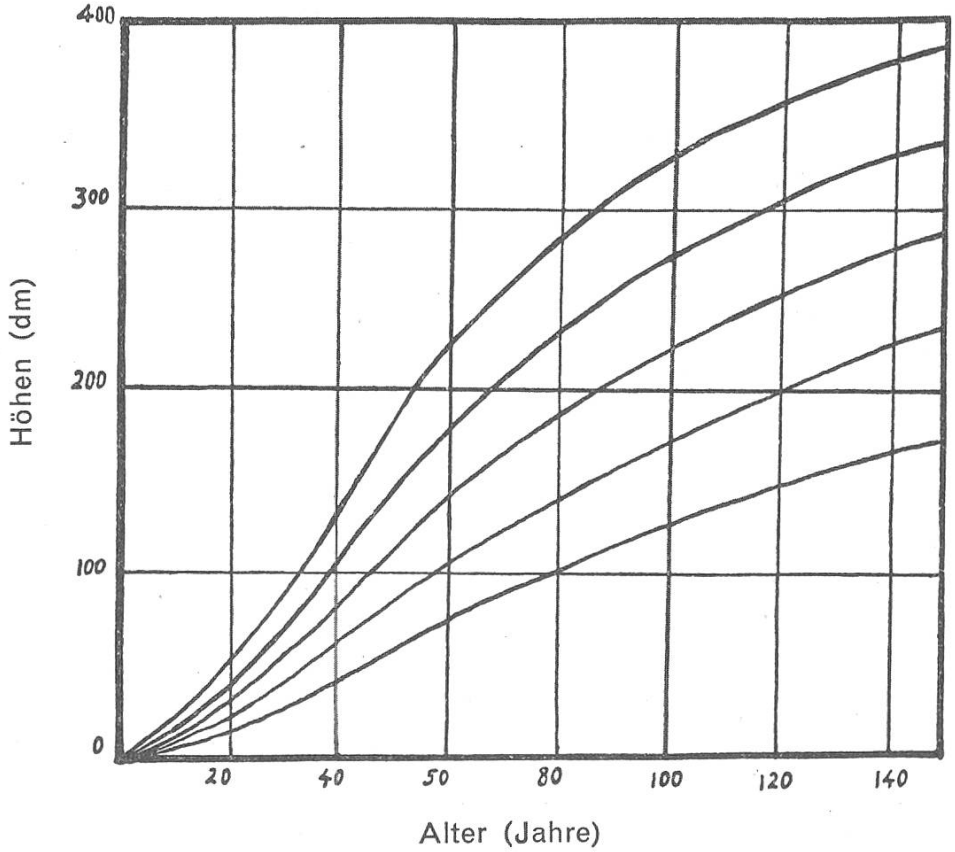

Abbildung 1

[1] Levaković A. O izgledima i mogućnostima numeričkog bonitiranja šumskih stojbina. Glasnik za šumske pokuse. Zagreb 1938 god.

[2] Guttenberg. Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge. 1915.

Für die Forstwissenschaft hat nicht nur die Wachstums-, sondern auch die Zuwachskurve eine große Bedeutung.

Die Zuwachskurve beginnt im Koordinatenausgangspunkt und steigt tangential und konvex zur Abszisse an. Nach Erreichen des Wendepunktes verläuft sie konkav bis zu einem Maximum, nachher abfallend bis zu einem andern Wendepunkt. Nach diesem sinkt sie weiter ab, jedoch wieder konvex. Im Unendlichen fällt sie zusammen mit der Abszisse.

Die Form der Zuwachskurven geht aus Abb. 2 hervor, aus der Zuwachskurve für den Höhenzuwachs der Tiroler Fichte nach Zahlenangaben von Guttenberg (die Zuwachskurven entsprechen also den Wachstumskurven in Abb. 1).

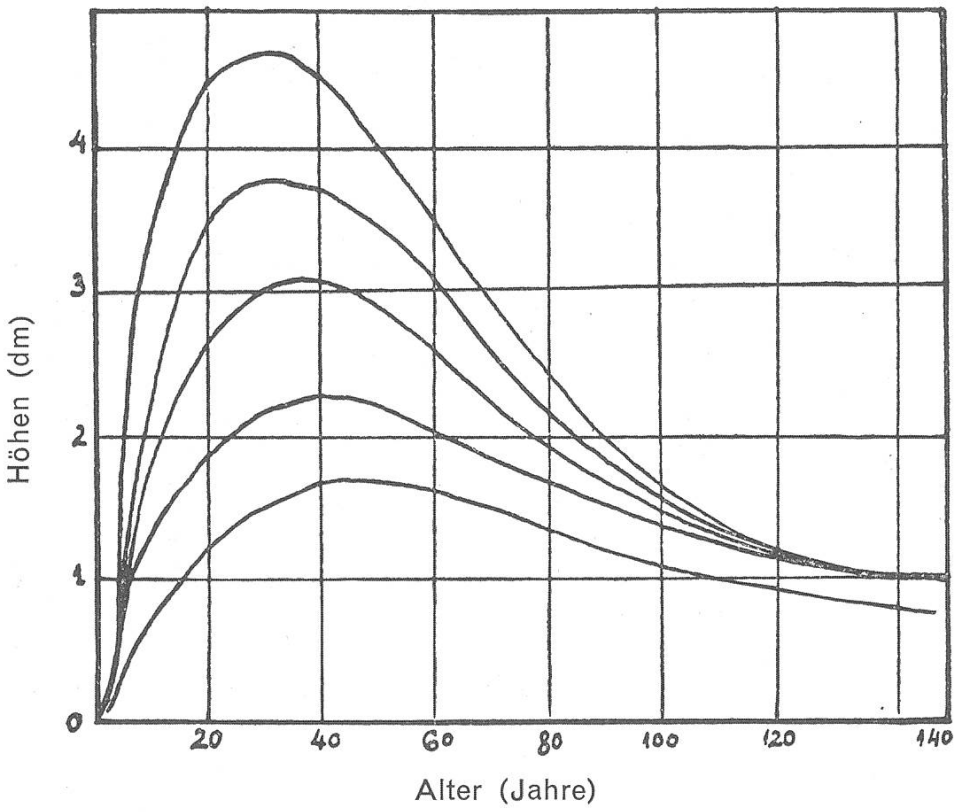

Abbildung 2

Wenn wir die *Wachstumsfunktion* mit der Gleichung

$$y = f(x) \tag{1}$$

bezeichnen, in welcher x das Alter des Baumes oder Bestandes bedeutet, dann muß die *Zuwachsfunktion* die erste Ableitung der Funktion (1) sein, d. h.

$$y' = f'(x) \tag{2}$$

Nach der Beschreibung des allgemeinen Charakters der Wachstumskurve muß die Funktion (1) folgende Bedingungen erfüllen:

1. Für $x = 0$ muß $y = 0$ sein; die Kurve fängt beim Nullpunkte des Koordinatensystems an.

2. Für $x = 0$ muß die erste Ableitung $y' = 0$ sein; die Kurve verläuft zuerst tangential zur Abszisse.
3. Für einen Zwischenwert von x muß die zweite Ableitung $y'' = 0$ sein; die Kurve verläuft über einen Wendepunkt.
4. Für $x = \infty$ soll die erste Ableitung $y' = 0$ sein; in der Unendlichkeit verläuft die Kurve parallel zur Abszisse.

Die Zuwachsfunktion (2) ist, wie oben angegeben, die erste Ableitung der Wachstumsfunktion (1). Nach der Beschreibung des Charakters der Zuwachskurven soll die Funktion (2) folgenden Bedingungen entsprechen:

1. Für $x = 0$ soll $y' = 0$ sein; die Zuwachskurve fängt im Koordinatenanfang an.
2. Für $x = 0$ soll $y'' = 0$ sein; die Kurve verläuft zuerst tangential zur Abszisse.
3. Für einen Zwischenwert von x soll $y'' = 0$ sein; die Kurve verläuft über ein Maximum.
4. Für zwei Grenzwerte von x soll $y''' = 0$ sein; die Kurve hat zwei Wendepunkte, die sich rechts und links von der Maximalordinate befinden.
5. Für $x = \infty$ soll $y' = 0$ sein; die Zuwachskurve fällt im Unendlichen mit der Abszisse zusammen.

Hier muß hervorgehoben werden, daß genauere Ausdrücke für die Funktionen (1) und (2) nicht nur Kurven mit allen Charaktereigenschaften der Wachstums- und Zuwachskurven von Waldbäumen und Beständen, sondern auch eine kleine Anzahl Konstanten aufweisen müssen. Dabei sollen letztere sich leicht berechnen lassen, besonders nach der Methode der kleinsten Quadrate, weil die Auffindung einer guten Funktion des Wachstums ja vorwiegend praktischen Zwecken dienen soll.

Mit der Ermittlung genauerer Ausdrücke für diese Funktionen befaßten sich im Verlaufe von anderthalb Jahrhunderten ziemlich viele Gelehrte. Auch eine Anzahl von Forstleuten bemühte sich um diese Frage. Eine Übersicht über diese Bemühungen hat Peschel[3] im «Tharandter Forstlichen Jahrbuch» 1938 gegeben. Trotzdem aber blieb dieses Problem weiterhin ungelöst.

Wir legen hier nun zwei Wachstums- und zwei Zuwachsfunktionen dar, welche, wie später gezeigt wird, allen notwendigen Bedingungen entsprechen.

2. Ableitung der vorgeschlagenen Wachstums- und Zuwachsfunktionen

Aus dem Charakter der Zuwachskurve werden wir vor allem systematisch die Zuwachsfunktionen ableiten und daraus auf dem Wege der Integration die Wachstumsfunktionen.

[3] Peschel. Die mathematischen Methoden zur Herleitung der Wachstumsgesetze von Baum und Bestand ... Tharandt. Forstl. Jahrb., H. 3/4, 1938.

Wir setzen voraus, daß die Zuwachskurve die folgende einfache Form besitzt: Sie fängt auf der Abszisse im Abstande a vom Koordinatenursprung an, erreicht ein Maximum, nimmt wieder ab und endet in der Abszisse im Abstande M vom Koordinatenursprung. Diese Kurve ist in Abb. 3 dargestellt.

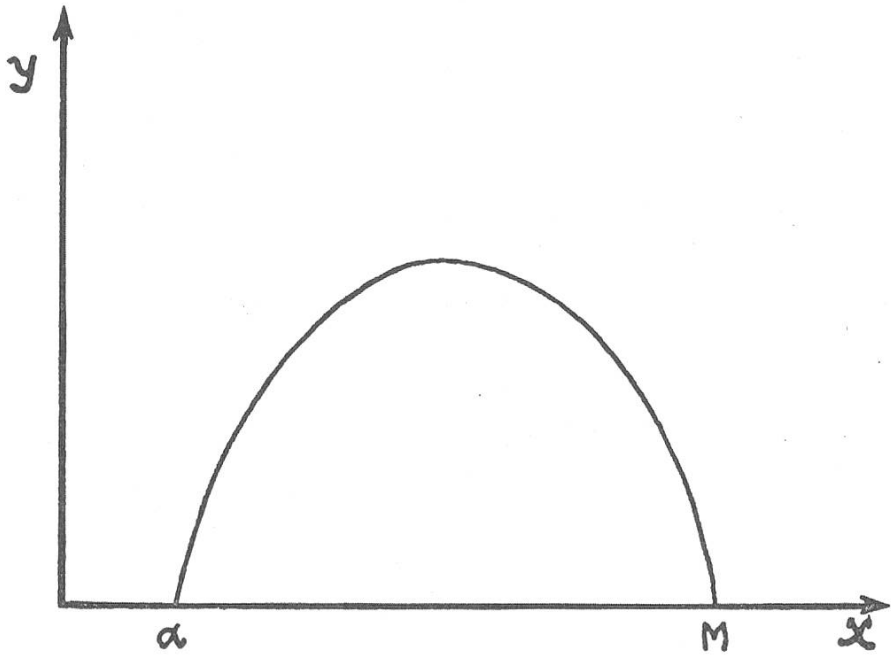

Abbildung 3

Die analytische Gleichung dieser Kurve soll folgende Bedingungen erfüllen:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \text{Für } x = a \text{ soll } y' = 0 \text{ sein.} \\ 2.\ \text{Für } x = M \text{ soll } y' = 0 \text{ sein.} \\ 3.\ \text{Zwischen } a \text{ und } M \text{ soll es nur ein Maximum geben.} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Diese Kurve kann analytisch durch eine rationale Bruchfunktion definiert werden

$$y' = \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + a_1x^2 + b_1x + c_1} \qquad (4)$$

wobei die Werte der Konstanten bestimmt sein sollen.

Da die Kurve von Abb. 3 nur die Bedingungen (3) erfüllen muß, setzen wir, um ihre einfachste Funktion zu bekommen,

$$a_1 = b_1 = c_1 = 0$$

und kommen so zur Gleichung

$$y' = \frac{ax^2 + bx + c}{x^3} \qquad (5)$$

Wenn wir nun die Werte der Konstanten aus der Gleichung (5) entnehmen, um die Bedingungen (3) zu erfüllen, erhalten wir

$$y' = k \frac{(x-a)(M-x)}{Mx^3}, \; k > 0 \tag{6}$$

oder

$$y'_{aM} = \frac{k}{x^2}\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{x}{M}\right) \tag{7}$$

Dieselben Bedingungen erfüllt auch die allgemeinere Funktion

$$y'_{aM} = \frac{k}{x^2}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\frac{b}{a}}\left(1-\frac{x}{M}\right)^{m} \tag{8}$$

in welcher b und m willkürlich bestimmte, positive Konstanten darstellen.

Weil die wirkliche Zuwachskurve vom Koordinatenursprung ausgeht und bei $x = \infty$ in der Abszissenachse endet, muß man annehmen, daß a dem Nullwert zustrebt und M dem ∞. In diesem Falle hätten wir

$$\lim y'_{aM} = \lim_{\substack{a \to 0 \\ M \to \infty}} \frac{k}{x^2}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\frac{b}{a}}\left(1-\frac{x}{M}\right)^{m}$$

$$\lim y'_{aM} = \frac{k}{x^2} e^{-\frac{b}{x}} \tag{9}$$

Diese Funktion erfüllt, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, alle Bedingungen einer richtigen *Zuwachsfunktion* (mit zwei Konstanten).

Es ist schon hervorgehoben worden, daß die Zuwachsfunktion die erste Derivation der Wachstumsfunktion darstellt. Deshalb bekommen wir die gesuchte Funktion, wenn wir die Gleichung (9) integrieren, d. h.

$$J = k\int \frac{e^{-\frac{b}{x}}}{x^2}\,dx = \frac{k}{b}\int e^{-\frac{b}{x}}\,d\,\frac{-b}{x} = \frac{k}{b}e^{-\frac{b}{x}}$$

$$J = a\,e^{-\frac{b}{x}} \tag{10}$$

d. h. eine *Wachstumsfunktion* mit zwei Konstanten, wobei $k = ab$ und $a > 0$.

Der Funktion (8) kann noch eine allgemeinere Form gegeben werden

$$y'_{acM} = \frac{k}{x^{c+1}}\left(1-\frac{a}{x^c}\right)^{\frac{b}{a}}\left(1-\frac{x}{M}\right)^{m} \tag{11}$$

wobei auch c eine bestimmte positive Konstante darstellt. In diesem

Falle würde die Kurve nicht im Abstande a vom Koordinatenursprung ausgehen, sondern im Abstande $a^{\frac{1}{c}}$, wodurch jedoch die Gestalt derselben (Abb. 3) sich nicht ändert.

Wenn wir auch diesmal $lim\ a = 0$ und $lim\ M = \infty$ setzen, erhalten wir

$$\lim y'_{acM} = \lim \frac{k}{x^{c+1}} \left(1 - \frac{a}{x^c}\right)^{\frac{b}{a}} \left(1 - \frac{x}{M}\right)^m =$$

$$\lim y'_{acM} = \frac{k}{x^{c+1}} e^{-\frac{b}{x^c}} \tag{12}$$

d. h. eine *Zuwachsfunktion* mit drei Konstanten.

Wenn man diese Funktion integriert, erhält man

$$J = k \int \frac{e^{-\frac{b}{x^c}}}{x^{c+1}} dx = \frac{k}{bc} \int e^{-\frac{b}{x^c}} d \frac{-b}{x^c} = \frac{k}{bc} e^{-\frac{b}{x^c}} \tag{13}$$

Weil $k = abc$, erhält man eine *Wachstumsfunktion* mit drei Konstanten

$$y = ae^{-\frac{b}{x^c}} \tag{14}$$

3. Untersuchung der abgeleiteten Funktionen des Wachstums und Zuwachses

Im ersten Kapitel haben wir die Bedingungen, welchen eine richtige Wachstumsfunktion und eine richtige Zuwachsfunktion entsprechen soll, aufgezählt. Wir wollen nun untersuchen, inwieweit die abgeleiteten Wachstumsfunktionen (10) und (14) sowie auch die entsprechenden Zuwachsfunktionen (9) und (12) diese Bedingungen erfüllen.

Wir wollen zuerst die einfacheren Wachstums- und Zuwachsfunktionen, d. h. solche mit nur zwei Konstanten, prüfen.

Wie bereits gesagt, ist es die erste Bedingung für eine richtige Wachstumsfunktion, daß ihr Graphikon im Koordinatenursprung beginnt, d. h. für $x = 0$ soll $y = 0$ sein. Tatsächlich haben wir bei der Wachstumsfunktion (10) für $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} y = \lim ae^{-\frac{b}{x}} = 0 \qquad (b > 0)$$

Die zweite Bedingung war, daß das Graphikon der Wachstumsfunktion tangential zur Abszissenachse verlaufen soll. Die Wachstumsfunktion erfüllt diese Bedingung, weil die erste Ableitung der Funktion (10)

$$y' = \frac{ab}{x^2} e^{-\frac{b}{x}} \tag{15}$$

für $x = 0$ gleich 0 wird, weil

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{b}{x}}}{x^2} = 0 \qquad (b > 0) \tag{15a}$$

Das Graphikon der Funktion (10) soll nach der dritten Bedingung einen Wendepunkt für einen kleinen Zwischenwert von x haben. Diesen Wert von x findet man, wenn man die zweite Ableitung von Funktion (10)

$$y'' = \frac{ab}{x^3} e^{-\frac{b}{x}} \left(\frac{b}{x} - 2 \right) \tag{16}$$

gleich 0 setzt und sie nach x auflöst. Dann erhalten wir

$$x = \frac{b}{2} \tag{17}$$

Das ist jener Wert für x, bei dem die Funktion (10) einen Wendepunkt hat.

Weiter soll das Graphikon der Funktion (10) der vierten Bedingung nach für $x = \infty$ parallel zur Abszissenachse verlaufen, d. h. y bekommt einen konstanten Wert. Wirklich beträgt

$$\lim_{x \to \infty} y' = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-\frac{b}{x}}}{x^2} = 0$$

Nun wollen wir die Zuwachsfunktion (9) prüfen, welche der untersuchten Wachstumsfunktion (10) entspricht und ihre erste Ableitung darstellt.

Es ist die erste Bedingung für eine richtige Zuwachsfunktion, daß ihr Graphikon im Koordinatenursprung beginne, d. h. für $x = 0$ soll $y' = 0$ sein. Dies wurde schon mit den abgeleiteten Gleichungen (15) und (15 a) bewiesen.

Zweite Bedingung ist es, daß das Graphikon der Zuwachsfunktion tangential zur Abszissenachse anlaufe. Diese Bedingung wird von der Funktion (9) erfüllt, wenn ihre erste Ableitung, welche durch die Gleichung (16) dargestellt ist, für $x = 0$ ebenfalls $= 0$ wird. Dies wird dadurch bewiesen, daß

$$\lim_{x \to 0} y'' = \frac{e^{-\frac{b}{x}}}{x^3} = 0 \quad \text{ist.}$$

Nach der dritten Bedingung soll das Graphikon der Zuwachsfunktion für einen Zwischenwert von x durch ein Maximum verlaufen. Diesen Wert findet man, wenn man die erste Ableitung der Funktion (9), welche durch die Gleichung (16) dargestellt ist, gleich 0 setzt und nach

x auflöst. Dann erhält man die Gleichung (17). Das zeigt uns, daß die Zuwachsfunktion (9) ihr Maximum dann erreicht, wenn die Wachstumsfunktion (10) über ihren Wendepunkt verläuft.

Der vierten Bedingung nach soll das Graphikon der Zuwachsfunktion (9) zwei Wendepunkte haben, welche sich rechts und links von der Maximalordinate befinden. Ihre Lage auf der Abszissenachse findet man, wenn die zweite Ableitung der Zuwachsfunktion gleich 0 gesetzt und die Gleichung nach x aufgelöst wird. Also

$$y''' = ab \frac{e^{-\frac{b}{x}}}{x^4} (6x^2 = 6bx + b^2) = 0 \tag{18}$$

wobei

$$6x^2 - 6bx + b^2 = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt

$$x_{1,2} = \frac{3b \pm \sqrt{9b^2 - 6b^2}}{6} = \frac{3b \pm b\sqrt{3}}{6} = \frac{b}{2} \pm \frac{b\sqrt{3}}{6} \tag{19}$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind die Abszissenwerte der Wendepunkte. Behält man im Auge, daß $\frac{b}{2}$ dem Abszissenwert des Maximums entspricht, so ist ersichtlich, daß die beiden Wendepunkte gleich weit von der Maximalordinate abstehen, und zwar in Abständen $\frac{b\sqrt{3}}{6}$.

Nach der fünften Bedingung soll das Graphikon der Zuwachsfunktion (9) für $x = \infty$ mit der Abszissenachse zusammenfallen, d. h. für $x = \infty$ soll $y' = 0$ sein. Und wirklich ist

$$\lim_{x \to \infty} y' = \lim_{x \to \infty} \frac{ab}{x^2} e^{-\frac{b}{x}} = 0$$

Aus den bisherigen Darlegungen ist ersichtlich, daß die Wachstumsfunktion (10) und die ihr entsprechende Zuwachsfunktion (9) mit zwei Konstanten alle Anforderungen richtiger Wachstums- und Zuwachsfunktionen erfüllen.

Auf gleiche Art und Weise wurde auch die dreikonstantige Wachstumsfunktion (14) und die ihr entsprechende Zuwachsfunktion (12) untersucht.

Der ersten Bedingung nach soll die Kurve der Funktion (14) im Koordinatenursprung anfangen. Dies wird gezeigt dadurch, daß

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} a e^{-\frac{b}{x^c}} = 0 \qquad (b > 0,\ c > 0) \text{ ist.}$$

Die Kurve dieser Funktion soll tangential zur Abszissenachse beginnen. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn die erste Ableitung der Funktion (14)

$$y' = abc \frac{e^{-\frac{b}{x^c}}}{x^{c+1}} \tag{20}$$

für $x = 0$ gleich 0 ist. Das ist der Fall, weil

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{b}{x^c}}}{x^{c+1}} = 0 \qquad (c > 0) \tag{20a}$$

Das Graphikon der Funktion (14) hat einen Wendepunkt für einen Grenz- und Kennwert von x. Diesen Wert von x findet man, wenn man die zweite Ableitung der Funktion (14)

$$y'' = abc \frac{e^{-\frac{b}{x^c}}}{x^{c+2}} \left[\frac{bc}{x^c} - (c+1) \right] \tag{21}$$

gleich 0 setzt und nach x auflöst. Dann erhalten wir

$$x = \left(\frac{bc}{c+1} \right)^{\frac{1}{c}} \tag{22}$$

Zuletzt soll für $x = \infty$ das Graphikon der Funktion (14) parallel zur Abszissenachse verlaufen. Dies wird dadurch bewiesen, daß

$$\lim_{x \to \infty} y' = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-\frac{b}{x^c}}}{x^{c+1}} = 0 \text{ ist.}$$

Es bleibt noch die dreikonstantige Zuwachsfunktion (12) zu überprüfen.

Daß das Graphikon dieser Funktion im Koordinatenursprung beginnt, wird durch Gleichung (20) und (20 a) bewiesen.

Anschließend verläuft dieses Graphikon tangential zur Abszissenachse. Dies wird bewiesen dadurch, daß die erste Abteilung der Funktion (12), dargestellt durch Gleichung (21), für $x = 0$ gleich 0 wird, weil

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{b}{x^c}}}{x^{c+2}} = 0 \text{ ist.}$$

Der dritten Bedingung nach soll das Graphikon der Funktion (12) für einen Grenzwert von x über ein Maximum verlaufen. Dies wird gefunden, wenn man die erste Ableitung der Funktion (12), dargestellt durch Gleichung (21), gleich 0 setzt und nach x auflöst. Dann erhält

man die Gleichung (22). Dies zeigt, daß dort, wo das Graphikon der Wachstumsfunktion (14) über einen Wendepunkt verläuft, das Graphikon der untersuchten Zuwachsfunktion (12) ein Maximum aufweist.

Das Graphikon der Zuwachsfunktion (12) hat zwei Wendepunkte. Ihre Lage bestimmt sich, wenn man die zweite Ableitung der Funktion (12)

$$y''' = abc \frac{e^{-\frac{b}{x^c}}}{x^{3c+3}} \left[x^{2c}(c^2+3c+2) - x^c(3bc^2+3bc) + b^2c^2\right] \tag{23}$$

gleich 0 setzt und nach x auflöst. Dann sind

$$x_{1,2}^{c} = \frac{3bc^2 + 3bc \pm \sqrt{9b^2c^2(c+1)^2 - 4b^2c^2(c^2+3c+2)}}{2(c^2+3c+2)} \tag{24}$$

Wenn wir nun

$$\frac{3bc^2 + 3bc}{2(c^2+3c+2)} = A$$

und

$$\frac{\sqrt{9b^2c^2(c+1)^2 - 4b^2c^2(c^2+3c+2)}}{2(c^2+3c+2)} = B$$

setzen, können wir schreiben

$$x_{1,2}^{c} = A \pm B$$

wobei

$$x_1 = \sqrt[c]{A+B} \quad \text{und} \quad x_2 = \sqrt[c]{A-B}$$

Das zeigt uns, daß die Kurve der Zuwachsfunktion (12) zwei Wendepunkte besitzt; sie liegen aber nicht symmetrisch zur Maximalordinate, wie das bei der zweikonstantigen Zuwachsfunktion (9) der Fall war.

Schließlich zeigt das Graphikon der Zuwachsfunktion (12) für $x = \infty$ ein Zusammenfallen mit der Abszissenachse. Und wirklich ist

$$\lim_{x \to \infty} y' = \lim_{x \to \infty} abc \frac{e^{-\frac{b}{x^c}}}{x^{c+1}} = 0$$

Wie ersichtlich, erfüllt die dreikonstantige Zuwachsfunktion (12) alle fünf ihr auferlegten Bedingungen.

* * *

Bekanntlich besteht die Aufgabe der Forstwirtschaft in letzter Linie darin, auf einer bestimmten Fläche dauernd möglichst große Mengen verschiedener Hölzer von möglichst hohem Werte zu erzeugen. Deshalb stehen die Fragen, welche das Wachstum und den Zuwachs der Waldbäume und Bestände betreffen, immer im Mittelpunkt der forstwirtschaftlichen Tätigkeit. Um diese Probleme richtig zu lösen, müssen die Forstleute mit den Gesetzen des Wachstums und des Zuwachses gut vertraut sein.

Die hier abgeleitete Wachstumsfunktion (10) und die entsprechende Zuwachsfunktion (9) entsprechen im wesentlichen den Anforderungen, die an Funktionen, welche die Wachstums- und Zuwachsgesetze formulieren, gestellt werden müssen.

Es ist jedoch ein Mangel der Funktion (9), daß ihre Kurve zwei Wendepunkte aufweist, die gleich weit von der Maximalordinate entfernt sind, was der wahren Form der Zuwachskurve nicht entspricht.

Das ist jedoch nicht der Fall bei der Wachstumsfunktion (14) und der ihr entsprechenden Zuwachsfunktion (12). Diese Funktionen entsprechen allen Anforderungen, die an eine mathematisch richtige Formulierung des Wachstums- und Zuwachsgesetzes gestellt werden können. Hingegen weisen diese Funktionen je drei Parameter auf und sind für die Praxis schwerer anzuwenden als die Funktionen (9) und (10) mit nur zwei Parametern.

Résumé

Dans cette étude, l'auteur expose et propose deux équations analytiques qui définissent la loi de la croissance des arbres et des peuplements forestiers, ainsi que deux équations sur l'accroissement.

Les nombreuses analyses des tiges, ainsi que les observations faites pendant de longues années sur le développement des peuplements forestiers ont démontré que la courbe de croissance a la forme d'un «S». Cette courbe commence du commencement d'un système de coordonnées rectangulaires, tangentiellement à l'axe des abscisses, et s'élève d'une façon convexe, arrivant aussitôt à un point d'inflexion. Après ce point, la courbe continue à s'élever, mais cette fois d'une façon concave et pour l'âge $+\infty$ elle devient parallèle à l'axe des abscisses (fig. 1).

De même, la courbe de l'accroissement commence du commencement des coordonnées, tangentiellement à l'axe des abscisses. Elle s'élève au début d'une façon convexe, atteint un point d'inflexion, après quoi elle continue à s'élever d'une façon concave atteignant un maximum. Ensuite la courbe descend d'une façon concave, arrivant à un second point d'inflexion, après quoi elle continue à descendre d'une façon convexe et pour $x = \infty$ elle se confond avec l'axe des abscisses (fig. 2).

En vertu de la courbe des accroissements décrite, l'auteur développe les fonctions (9) avec deux constantes et (12) avec trois constantes qui défi-

nissent la loi de l'accroissement. En intégrant ces fonctions, on obtient les fonctions de croissance (10) avec deux constantes et (14) avec trois constantes.

En étudiant ces fonctions, l'auteur démontre qu'elles répondent entièrement aux formes décrites ci-dessus des courbes de croissance et d'accroissement.

La vie en forêt dans l'Est canadien

Par *A.-O. Feihl,* Jonquière (Canada)

(32:37)

Lorsque le voyageur, ayant contourné Terre-Neuve par le nord, vogue en longeant le Labrador vers l'estuaire du St-Laurent, il découvre tout d'abord un continent inhabité parsemé de quelques rares arbres nains, paysage dont il se dégage irrésistiblement une impression glaciale de désolation. Mais à mesure qu'il descend vers le sud, les arbres grandissent et se resserrent pour former insensiblement un peuplement continu, avant-garde de l'immense forêt canadienne. Pendant plus d'un jour il longe ces côtes où la forêt peu à peu fait place à quelques terres cultivées; de temps en temps il entrevoit un village que toujours domine sa grande église. Après être remonté pendant de longues heures le large estuaire du St-Laurent, il aperçoit dans le lointain, au prochain détour du grand fleuve, la première cité canadienne d'importance, la vieille ville de Québec. Québec, capitale de la plus grande province du Canada (quarante fois la surface de la Suisse), patrie des Canadiens français, est bâtie sur une colline au-dessus du St-Laurent; elle a conservé précieusement ses vieilles maisons à l'architecture française et les remparts de sa citadelle, témoins des temps héroïques où Français et Anglais se battaient pour la possession de ce pays sans limite. Rappelons ici que le Canada, colonisé d'abord par les Français qui en prirent possession en 1534, passa aux Anglais en 1763 à la suite d'une grande bataille qui se déroula devant Québec.

Du haut de la ville, si l'on regarde vers le nord, on admire au premier plan la perspective du grand fleuve parsemé de bateaux; n'oublions pas que le St-Laurent est une des voies fluviales les plus importantes du monde. Longue de plus de 3500 km, elle pénètre presque jusqu'au centre du continent. Au second plan s'étendent de riches campagnes, et l'horizon est borné par une chaîne de collines dont quelques sommets dépassent un peu 1000 mètres; on les appelle ici avec beaucoup de sérieux des «montagnes». Ces montagnes — soyons courtois et employons le langage du pays — portent le nom de Laurentides, elles s'étendent sur des centaines de kilomètres entre le St-Laurent et la baie d'Hudson. Elles sont couvertes de forêts quasi ininterrompues, source en apparence inépuisable de bois pour les scieries et les fabriques de papier.