Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Forstwesen = Swiss foresty journal = Journal forestier suisse

Herausgeber: Schweizerischer Forstverein

Band: 84 (1933)

Heft: 4

Artikel: Eine mathematisch-statistische Untersuchung über den Aufbau des Plenterwaldes [Schluss]

Autor: Meyer, H. Arthur

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-767774

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

soll, daß durch entsprechenden Ausbau nicht auch gesteigerte Wohnbedürfnisse zu befriedigen wären.

Es wäre noch allerlei Wissenswertes über dieses Haus, wie auch allgemein über den gegenwärtig wieder im Mittelpunkt des Interesses stehenden Holzbau zu berichten. Da aber an dieser Stelle ein Bericht über den von der Lignum und dem Schweizerischen Werkbund veranstalteten « Wettbewerb zur Erlangung von Entwürfen für neuzeitliche Holzhäuser » zu erwarten ist, so sollen weitere Ausführungen berufenerer Hand vorbehalten bleiben. Eine wichtige Grundbedingung, eigentlich die Lebensbedingung für die Weiterentwicklung des Holzbaues, soll hier noch berührt werden, nämlich die vertrauenswürdige Bauausführung, über welche die Erbauerin dieses Holzhauses schreibt: « Es muß aber Gewissenssache aller Unternehmer sein, das jetzt sich wieder zeigende Vertrauen zum Holzhaus zu pflegen und zu fördern durch gute Arbeit und einwandfreie Konstruktion. Der Preisdrückerei darf die Solidität nicht zum Opfer gebracht werden. Ein Verzicht in einem Fall ist von vorübergehendem Nachteil, ein schlechtes Holzhaus aber ein bleibender Schaden, nicht nur für den einzelnen, sondern für alle, denen das Holz, dieses Wunderwerk der Natur, lieb ist. »

Die schweizerische Forstwirtschaft darf vor allem der Lignum für ihren machtvollen Vorstoß zugunsten des Holzhauses dankbar sein. Denn hier kann sich wieder ein Absatzgebiet für einheimisches Holz öffnen, das neben erstklassigem auch ruhig Holz zweiter Güte, für das vielerorts so schwer Absatz zu finden ist, verwenden kann.

Dr. *Großmann*, Forstmeister.

Eine mathematisch-statistische Untersuchung über den Aufbau des Plenterwaldes.

Von *H. Arthur Meyer*, Forstingenieur.

(Schluß.)

g) **Die Bestimmung des Materials unterhalb der Kluppierungsschwelle.** Unter der Voraussetzung, daß die Stammzahlverteilung auch unterhalb der Kluppierungsschwelle von 16 cm Brusthöhendurchmesser noch dem Verteilungsgesetz $V(x) = k \cdot e^{-\alpha x}$ *gehorcht*, können auch in diesem Intervall, wie in jedem andern, Stammzahl und Kreisfläche und daraus die Masse für beliebige Durchmesserstufen berechnet werden. Diese Voraussetzung ist bis zum Durchmesser der Derbholzgrenze ziemlich sicher gut erfüllt, für kleinere Durchmesser, bei welchen aber jede Abweichung auf die zu berechnende Kreisfläche oder Masse von nur geringem Einfluß wäre, etwas schlechter. Sich hierüber absolute Klarheit zu verschaffen, müßte zum Gegenstand einer besonderen Untersuchung gemacht werden.

Wir geben unten lediglich die gesamte Stammzahl und die gesamte Kreisfläche unterhalb 16 cm Brusthöhendurchmesser; letztere

wurde diesmal mit Hilfe der in Abschnitt I, *f)*, abgeleiteten Formel berechnet.

Tabelle 8. *Stammzahl und Brusthöhenkreisfläche sämtlicher Stämme unterhalb der Kluppierungsschwelle von 16 cm.*

	Stammzahl pro ha	Kreisfläche pro ha, m²	Kreisfläche in % der Kreisfläche > 16 cm
$a = 0{,}050$	288	1,6	7
Typus A, 0,055	440	2,4	8
„ B, 0,060	581	3,1	10
„ C, 0,065	713	3,6	11
„ D, 0,070	836	4,1	13
„ E, 0,075	952	4,5	15
0,080	1060	4,9	17

Die Zahlen für den Kreisflächenanteil des Materials unter 16 cm in Prozent der Kreisfläche des Materials oberhalb der Kluppierungsschwelle dürften bei der Veranschlagung der Zwischennutzung (im Sinne der Kontrollmethoden = matériel accessoire) wertvolle Anhaltspunkte bieten. Für die Masse würden die entsprechenden prozentualen Werte etwas kleiner ausfallen. Die Genauigkeit der berechneten *Stammzahlen* unterhalb der Kluppierungsschwelle darf nicht hoch eingeschätzt werden, weil die Verteilungsfunktion für Durchmesser nahe bei 0 natürlich nur mehr schlecht stimmt; bei der Berechung der Kreisfläche oder der Masse kommt dieser Fehler, wie gesagt, nur wenig zur Geltung.

h) **Diskussion der Verteilungskurve der Kreisfläche.** Die in neuerer Zeit vielfach üblich gewordene graphische Darstellung der Brusthöhenkreisfläche, welche bei einigermaßen ausgeglichenen Wäldern eine unsymmetrisch glockenförmige Kurve ergibt, legt es uns nahe, die Verteilungsfunktion der Kreisfläche in diesem Zusammenhang noch näher zu untersuchen. Ausgehend von unserer Verteilungsfunktion der Stammzahlen als Funktion des Brusthöhendurchmessers lautet die Verteilungsfunktion der Brusthöhenkreisfläche

$$V_G(x) = \frac{k \cdot \pi}{4} e^{-ax} \cdot x^2.$$

Durch Integration dieser Funktion (siehe Abschnitt I, *f)* und Einsetzen der gewünschten Intervallgrenzen kann bei gegebenen Werten von a und k die Kreisfläche in einem beliebigen Durchmesserintervall direkt berechnet werden.

Bilden wir unter Weglassung des konstanten Faktors $\frac{k \cdot \pi}{4}$ den den ersten Differentialquotienten von $V_G(x)$ und setzen ihn zur Bestimmung der Maxima und Minima der Verteilungskurve $= o$, so erhält man:

$$2x \cdot e^{-ax} - ax^2 \cdot e^{-ax} = x\left(2e^{-ax} - ax \cdot e^{-ax}\right) = o.$$

Daraus folgt:

$$x_1 = o$$

und aus

$$e^{-\alpha x}(2 - \alpha x) = o$$

$$x_2 = \infty$$

$$x_3 = \frac{2}{\alpha}.$$

An den Stellen x_1 und x_2, an denen die Verteilungskurve $V_G(x)$ horizontale Tangenten besitzt, ist zugleich $V_G(x)$ selbst $= o$. An der Stelle $x_3 = \frac{2}{\alpha}$ erreicht die Kurve ein Maximum mit einem Betrag von $V_G(x) = \frac{k \cdot \pi}{\alpha^2} e^{-2}$. Der Koeffizient α der Verteilungsfunktion erhält damit eine neue anschauliche Bedeutung, indem er gleich dem doppelten reziproken Durchmesser ist, bei welchem die Verteilungskurve der Kreisfläche ein Maximum aufweist.

Setzt man den zweiten Differentialquotienten von $V_G(x) = o$, so erhält man die x-Stellen für zwei Wendepunkte der Kurve:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{\alpha}$$

Mit Hilfe dieser Werte läßt sich der Verlauf der Verteilungskurve der Kreisfläche schon deutlich angeben. Siehe die Kurven der verschiedenen Typen in Fig. 7.

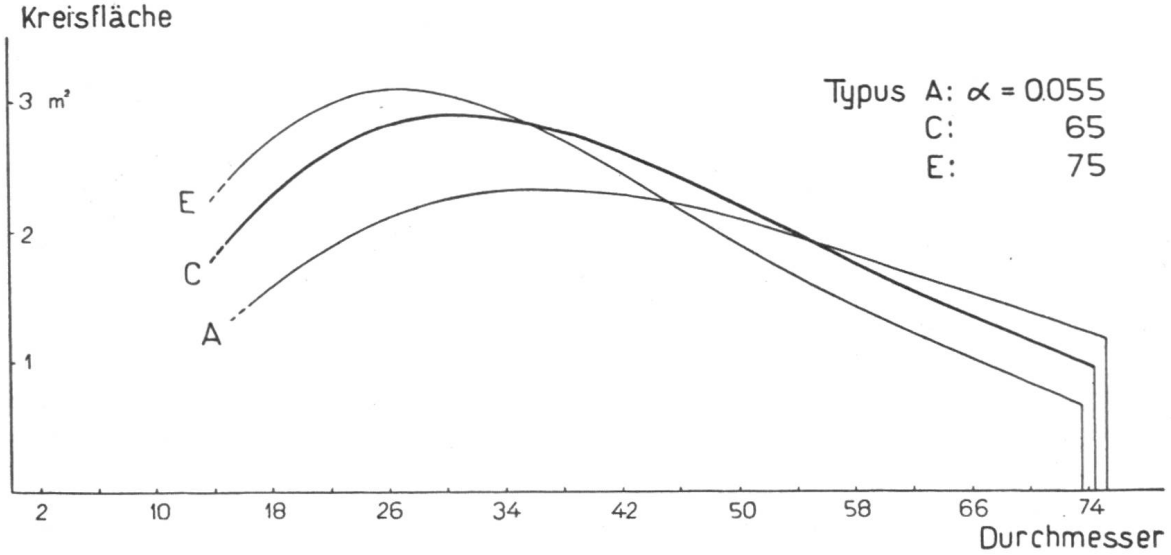


Fig. 7. Verteilung der Brusthöhenkreisfläche bei verschiedenen Werten von α.

i) **Die Veränderung der Stammzahlverteilung und das Verhältnis von Zuwachs und Etat.** Durch den jährlich erfolgenden Stärkezuwachs verändern die Stämme als die einzelnen Exemplare des Kollektivgegenstandes ihren Argumentwert x und damit ihre ursprüngliche Stelle in der Kollektivreihe, welche durch die Koeffizienten α und k der Verteilungsfunktion charakterisiert wurde. Vorausgesetzt, daß weder durch die Eingriffe des Wirtschafters noch durch natürliches Absterben irgendwelche Stämme aus dem Walde herauskommen,

ändert sich dadurch im Verlaufe der Zeit die in einem bestimmten Zeitpunkt festgestellte Stammzahlverteilung. Durch die alljährlichen oder periodischen Hiebe muß die ursprüngliche, normale Verteilung immer wieder hergestellt werden. Hier stellen sich zwei Fragen: Welcher Art ist die durch den Zuwachs erzeugte Störung der ursprünglichen Stammzahlverteilung, und in welcher Weise müssen die periodischen Eingriffe erfolgen, um den ursprünglichen Zustand wieder herzustellen?

Die Veränderung einer als normal bezeichneten Stammzahlverteilung wird durch die Größe des Stärkezuwachses der einzelnen Stämme bedingt. Da derselbe mit wachsender Stammstärke ändert, sollte zuerst diese Änderung als Funktion des Brusthöhendurchmessers (x) ausgedrückt werden können. Nehmen wir der Einfachheit halber einmal an, der Stärkezuwachs sei in allen Durchmessern, von der Kluppierungsschwelle bis zu den stärksten Stämmen, gleich groß (eine Annahme, die im besagten Intervall mit der Wirklichkeit sehr wohl übereinstimmen kann); betrage dieser jährliche Stärkezuwachs $d(x) = c$, so würden in t Jahren alle Stämme, die früher einen Durchmesser von x cm besessen haben, $x + c \cdot t$ cm messen. Die Verteilungskurve würde um den Betrag $c \cdot t$ parallel zur x-Achse nach rechts verschoben (siehe Fig. 8).

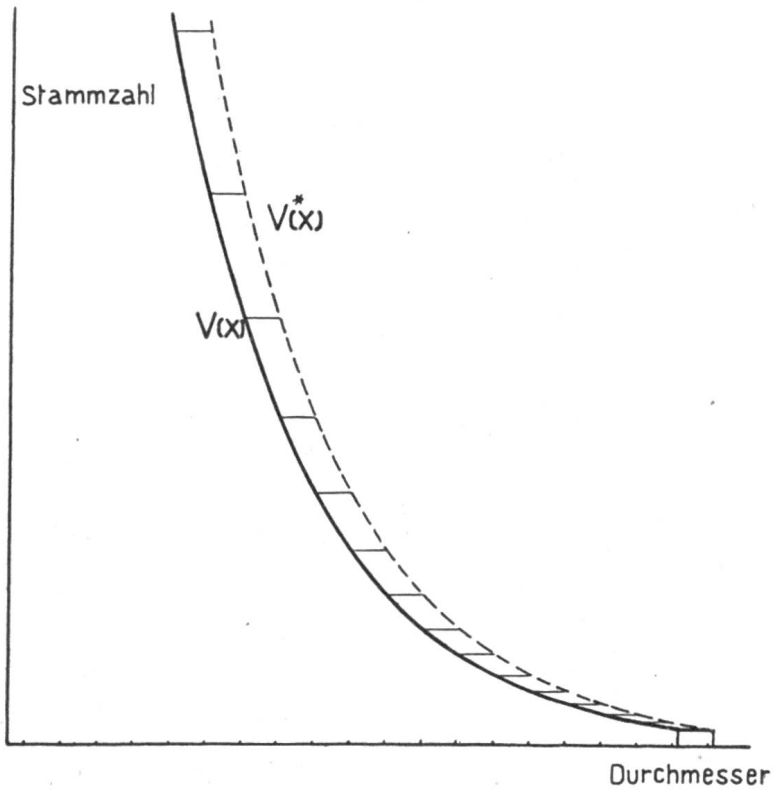


Fig. 8.

War daher die ursprüngliche Verteilungsfunktion $V(x) = k \cdot e^{-\alpha x}$, so wird die neue Verteilungsfunktion $V^*(x) = k \cdot e^{-\alpha(x - ct)}$. Setzen wir $k \cdot e^{\alpha ct} = k^*$, so haben wir

$$V^*(x) = k^* \cdot e^{-\alpha x}$$

Diese unter Zuhilfenahme der Anschauung erhaltene Formel würde rein analytisch folgendermaßen abgeleitet:

War der Durchmesser eines Stammes in der ursprünglichen Verteilung $= x$, so besitzt dieser Stamm bei einem jährlichen Stärkezuwachs $d(x) = c$ nach t Jahren den Durchmesser $x + ct$, welchen wir mit x' bezeichnen. Wir erhalten daher umgekehrt $x = x' - ct$, und die ursprüngliche Verteilungsfunktion $V(x)$ geht in t Jahren über in die Verteilungsfunktion

$$V^*(x') = k \cdot e^{-\alpha(x' - ct)},$$

oder wenn wir das Argument x' nun wieder mit x bezeichnen, in die bereits gefundene Funktion

$$V^*(x) = k \cdot e^{-\alpha(x - ct)} = k^* \cdot e^{-\alpha x}.$$

Lassen wir jetzt die oben gemachte Annahme fallen und fragen wir uns, welcher Art der Verlauf des Stärkezuwachses in Wirklichkeit ist. Da die erste Altersperiode der Bäume, welche die größten Unregelmäßigkeiten im Dickenwachstum aufweist, für unsere Untersuchungen außer Betracht fällt — wir kluppieren ja erst von 16 cm an — so ist beinahe zum vornherein anzunehmen, daß der mittlere Stärkezuwachs als Funktion des Brusthöhendurchmessers keinen allzu komplizierten Verlauf aufweisen wird. Tatsächlich zeigen die Werte, die den Ertragstafeln entnommen werden können, nach einem anfänglichen Maximum, welches jedoch *unter* der üblichen Kluppierungsschwelle liegt, einen regelmäßigen, durch eine *Gerade* gut darstellbaren Verlauf. Von Stamm zu Stamm häufig vorhandene Unterschiede im *Plenterwald*, hervorgerufen durch plötzliche Freistellungen nach einem längern Unterdrückungszeitraum, dürften sich im Mittel sämtlicher Stämme eines Waldes ausgleichen, so daß auch hier die Gleichung einer *Geraden* genügt, um den Verlauf des Stärkezuwachses hinreichend genau zu charakterisieren; man vergleiche z. B. die in dieser Zeitschrift publizierten Werte des Gemeindewaldes von Boveresse, die im Jahrgang 1932, S. 239, zusammen mit einigen Ertragstafelwerten graphisch dargestellt sind. Ohne unsere durch diese paar Tatsachen begründete Annahme durch weitere Beispiele zu belegen, möchten wir für den oben gesetzten Fall die Veränderung der Verteilungsfunktion analytisch verfolgen und zeigen, zu was für Ergebnissen derartige Überlegungen führen.

Für den Stärkezuwachs als Funktion des Durchmessers erhalten wir also den Ausdruck

$$d(x) = px + c.$$

Nach t Jahren besitzt ein ursprünglicher Durchmesser x daher (angenähert) die Größe $x' = x + (px + c)t = x(1 + pt) + ct$. Daraus wird

$$x = \frac{x' - ct}{1 + pt}$$

$V(x)$ geht daher über in

$$V^*(x') = k \cdot e^{-\frac{\alpha(x' - ct)}{1 + pt}} = k \cdot e^{\frac{\alpha \cdot ct}{1 + pt}} \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot x'}{1 + pt}}$$

Setzen wir $k \cdot e^{\frac{\alpha \cdot ct}{1 + pt}} = k^*$, $\frac{\alpha}{1 + pt} = \alpha^*$, und schreiben statt x' wieder x, so erhalten wir die alte Form der Verteilungsfunktion

$$V^*(x) = k^* \cdot e^{-\alpha^* \cdot x}$$

Diese Feststellung ist wichtig: Unter der gemachten Annahme über den Verlauf des Stärkezuwachses als Funktion des Durchmessers

ändert eine *normale, durch das Exponentialgesetz darstellbare Stammzahlverteilung ihren Charakter trotz des jährlich erfolgenden Stärkezuwachses* (innerhalb einer Wirtschaftsperiode) *nicht.* Ob wir daher einen Vorratsaufbau vor oder nach einem erfolgten Schlag analysieren, so gehorcht die Stammzahlverteilung in beiden Fällen der Verteilungsfunktion $V(x) = k \cdot e^{-\alpha x}$. Vergleicht man die Koeffizienten « vor und nach dem Schlag », so wird man finden, daß sich der Koeffizient α nur wenig verändert hat, verhältnismäßig mehr dagegen der Koeffizient k; für den Fall eines konstanten Stärkezuwaches in allen Durchmesserstufen ändert sich α, wie oben gezeigt wurde, überhaupt nicht.

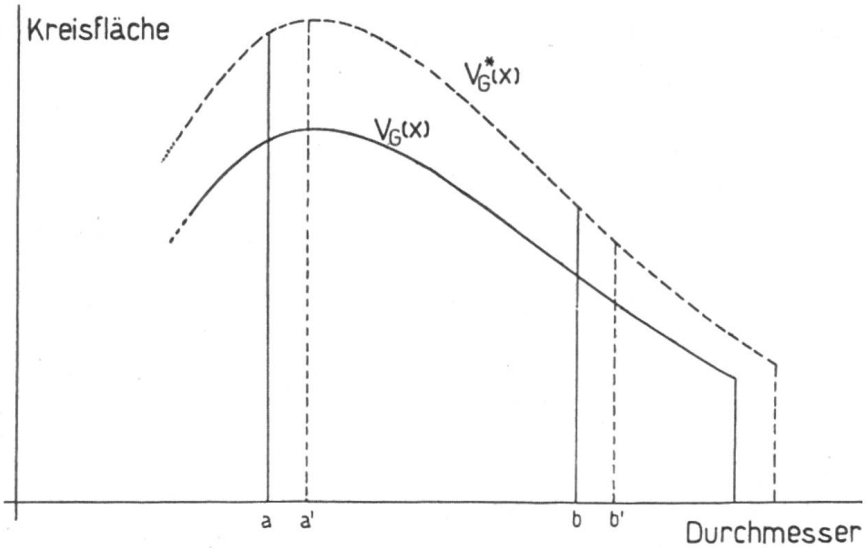


Fig. 9.

Mit Hilfe der ursprünglichen und der neuen Verteilungsfunktion kann für eine Periode von t Jahren sowohl der Zuwachs als auch der Etat für eine beliebige Stärkeklasse oder für *alles* Material oberhalb der Kluppierungsschwelle berechnet werden. In Fig. 9 sind beispielsweise die Verteilungskurven der *Kreisfläche* $V_G(x)$ und $V_G^*(x)$ aufgezeichnet. Letztere wird im Intervall a—b zuerst gegeben durch das bestimmte Integral

$$G = \int_a^b V_G(x) \cdot dx$$

Ihm entspricht die durch die x-Achse, die Kurve $V_G(x)$ und die zwei Ordinaten in a und b eingeschlossene Fläche. Nach t Jahren reicht die Kreisfläche im gleichen Intervall bis an die Kurve $V_G^*(x)$:

$$G^* = \int_a^b V_G^*(x) \cdot dx$$

Um den ursprünglichen Zustand wieder herzustellen, muß die Differenz dieser zwei Integrale, dargestellt durch das zwischen den zwei Ordinaten in a und b und den beiden Kurven gelegene Flächenstück, aus dem Walde herauskommen. Der Kreisflächen*etat* beträgt für t Jahre G^*—G.

Soll der *Zuwachs* für die gleiche Periode bestimmt werden, so müssen wir untersuchen, welche Kreisfläche die ursprünglich im

Intervall a—b gelegenen Stämme nach t Jahren besitzen. Der Stärkezuwachs beträgt im Punkt a jährlich $d(a) = pa + c$, im Punkt b $d(b) = pb + c$. Die ursprünglich im Intervall a—b gelegenen Stämme befinden sich also nach t Jahren im Intervall a'—b', wobei $a' = (pa + c)t$ und $b' = (pb + c)t$, und die ihnen entsprechende Kreisfläche ist durch das Integral

$$G^{*\prime} = \int_{a'}^{b'} V_G^*(x) \cdot dx$$

gegeben, welches durch die zwischen den Ordinaten in a' und b' bis an die Kurve $V_G^*(x)$ gelegene Fläche dargestellt wird. Der Kreisflächenzuwachs im Intervall a—b ist für den Zeitraum von t Jahren somit durch die Differenz $G^{*\prime}$—G gegeben. *Für eine bestimmte Stärkeklasse sind also laufender Zuwachs und Etat nicht gleich groß.* Die Differenz $E_G - Z_G$ beträgt $(G^* - G) - (G^{*\prime} - G) = G^* - G^{*\prime}$. Zur Berechnung dieser Differenz schreiben wir:

$$G^* = \int_a^b V_G^*(x) \cdot dx = \int_a^{a'} V_G^*(x) \cdot dx + \int_{a'}^b V_G^*(x) \cdot dx$$

und

$$G^{*\prime} = \int_{a'}^{b'} V_G^*(x) \cdot dx = \int_{a'}^b V_G^*(x) \cdot dx + \int_b^{b'} V_G^*(x) \cdot dx$$

und erhalten für die Differenz

$$G^* - G^{*\prime} = \int_a^{a'} V_G^*(x) \cdot dx - \int_b^{b'} V_G^*(x) \cdot dx.$$

Der Differenz der obigen zwei Integrale entspricht in der Figur die Differenz der zwei durch die Ordinaten in a und a' bzw. b und b' bis zur Kurve $V_G^*(x)$ reichenden Flächen. Es ist offensichtlich, daß diese Differenz je nach der gebildeten Stärkeklasse verschieden groß ist.

Was hier an Hand der Verteilungsbilder der Kreisfläche entwickelt wurde, gilt natürlich auch für Stammzahl und Masse: Man braucht sich die Verteilungskurven der Kreisfläche nur durch diejenigen der Stammzahl oder der Masse ersetzt zu denken.

* * *

Mit den zuletzt behandelten Dingen sind wir eigentlich bereits über den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung hinausgekommen. Sollte es jedoch gelungen sein, den Leser von der Brauchbarkeit der entwickelten mathematisch-statistischen Methode zur Normalvorratsbestimmung im Plenterwald zu überzeugen, so war es doch

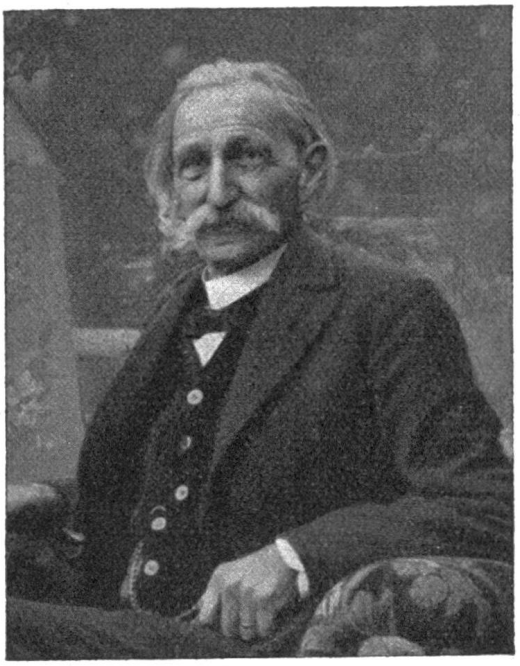
wertvoll, noch im Rahmen dieser Arbeit festzustellen, daß durch eine logisch ungezwungene Erweiterung jener Gedankengänge in gleicher Weise auch die Zuwachsverhältnisse im ungleichaltrigen Wald erforscht werden könnten. Das hierfür notwendige Grundlagenmaterial, welches allerdings heute noch nicht in zureichendem Umfange vorhanden ist, vermag uns ebenfalls die Praxis, nämlich die Kontrollmethode, zur Verfügung zu stellen. In bezug auf die Ermittlung des Normalvorrates kann auf das große, in vielen Wirtschaftsplänen enthaltene und in unserm Sinne noch unverarbeitete Material schon heute hingewiesen werden.

MITTEILUNGEN

† Prof. Giuseppe Mariani.

In weitesten Kreisen unseres Landes wird man durch die Nachricht vom Hinschied dieses trefflichen Mannes schmerzlich betroffen sein. Er starb am 2. März kurz vor seinem 83. Geburtstag.

Seine Ausbildung als naturwissenschaftlicher Lehrer hat Mariani an der Abteilung für Fachlehrer an der E. T. H. erhalten. Nachdem er kurze Zeit an einem Privatinstitut in Zug gelehrt hatte, siedelte er nach Locarno als Professor für Sprachen und Naturwissenschaft an der dortigen Mittelschule über, begleitet von seiner hochgesinnten jungen Frau, einer geborenen Stadlin aus Zug.



Prof. Giuseppe Mariani.
1850—1933.
(Der Klubsessel, auf dem er ruht, wurde ihm bei seinem 80. Geburtstag, an welchem auch dieses Bild aufgenommen wurde, von den „Tessiner Pfingstexkursionisten" geschenkt.

Wir können den Verstorbenen wohl am besten charakterisieren durch den Glückwunsch, den ihm am 15. April 1930 das « Marianikomitee der Exkursionisten » (Prof. Jaccard, Rikli und Schröter; Prof. Keller weilte nicht mehr unter den Lebenden) zu seinem 80. Geburtstag sandte. Die Leser dieser Zeitschrift waren ja größtenteils bei unsern Tessiner Exkursionen dabei.

« Vom Jahre 1885 bis 1929, also während voller 44 Jahre, haben Sie jeweilen die Pfingstexkursionen begleitet, welche mit Studierenden der Eidgenössischen Technischen Hochschule, mit Hörern der Zürcher Volkshochschule und mit Mitgliedern des S. A. C. ausgeführt wurden. Sie haben damit über 900 Exkursionsteilnehmern eine hohe Freude bereitet und sie alle „pro Ticino" gewonnen.