Berechnung der elektrischen Verhältnisse in Vierpolketten und elektrischen Leitungen mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen und der Polynome von Morgan-Voyce

Autor(en): **Lahr, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, des Verbandes Schweizerischer Elektrizitätsunternehmen = Bulletin de l'Association Suisse des Electriciens, de l'Association des Entreprises électriques suisses**

Band (Jahr): **75 (1984)**

Heft 12

PDF erstellt am: **29.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-904421

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Berechnung der elektrischen Verhältnisse in Vierpolketten und elektrischen Leitungen mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen und der Polynome von Morgan-Voyce

J. Lahr

Es wird ein neues Verfahren für die Berechnung der elektrischen Verhältnisse in Vierpolketten und elektrischen Leitungen vorgestellt, in dem die Fibonacci-Zahlen und die Polynome von Morgan-Voyce eine zentrale Rolle spielen. Unter Verwendung von homogenen linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung werden rekursive Rechenmethoden entwickelt, die für die Bestimmung aller elektrischer Grössen nur auf die vier arithmetischen Grundoperationen zurückgreifen. Die allgemeinen Ausdrücke der angewendeten Polynome werden auf ihre Eignung für theoretische Erörterungen geprüft. Auf numerische Beispiele und auf die schrittweise Darstellung des Rechenweges wurde besonderer Wert gelegt.

Une nouvelle méthode pour le calcul des relations électriques dans les chaînes de quadripôles et dans les lignes électriques est exposée. Les nombres de Fibonacci et les polynômes de Morgan-Voyce y jouent un rôle prépondérant. En utilisant des équations homogènes linéaires à différences du second ordre, des procédés de récurrence ont été développés qui, pour la détermination de toutes les grandeurs électriques ne se servent que des quatre opérations arithmétiques de base. Les termes généraux des polynômes appliqués sont examinés sous l'aspect de leur aptitude à des considérations théoriques. Des exemples numériques et des descriptions pas à pas des méthodes de calcul ont trouvé une attention spéciale.

Zum 70. Geburtstag von Prof. Dipl.-Ing. *Heinrich A. Leuthold*, Vorsteher des Institutes für Elektrische Anlagen und Energiewirtschaft der ETH vom 1. April 1957 bis zum 1. April 1981 und Direktor des Fernheizkraftwerkes von 1959 bis 1974.

Adresse des Autors

J. H. G. Lahr, Dr. sc. techn., Institut Supérieur de Technologie, rue Richard Coudenhove-Kalergi, L-1359 Luxembourg-Kirchberg.

1. Einleitung

Die klassischen Methoden für die Berechnung der elektrischen Eigenschaften von Kettenleitern und elektrischen Leitungen wurden aufgestellt, indem der allgemeinste Fall behandelt und gelöst wurde, von dem dann alle anderen Fälle und Spezialisierungen abgeleitet wurden. Das genau umgekehrte Verfahren ist jedoch auch denkbar. Man vereinfacht eine Aufgabenstellung so weit wie nur möglich, auch wenn der Vereinfachungsgrad zu Problemen führt, die von der Wirklichkeit weit entfernt sind, und versucht die gefundenen Lösungsmethoden vom einfachsten Fall auf immer allgemeinere Fälle analog zu übertragen. Viele Zusammenhänge sind in vereinfachten Situationen leichter zu erkennen, ja man kann Beispiele anführen, in denen die Problemlösung nur dadurch gefunden wurde, dass der Weg der Analogie von der Spezialisierung zur Generalisierung strikt eingehalten wurde. Auch in der vorliegenden Abhandlung wird dieses Verfahren angewendet.

2. Berechnung eines vereinfachten Kettenleiters

In Figur 1 ist eine aus 6 Gammazwei-Vierpolen bestehende Kette dargestellt, in der alle Elemente den gleichen ohmschen Widerstand R haben. Unter Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze findet man für die Zweigströme die Werte der Tabelle I.

Zweigströme zu Figur 1 — Tabelle I

j_2	=	j_1	j_8	=	$21j_1$
j_3	=	$2j_1$	j_9	=	$34j_1$
j_4	=	$3j_1$	j_{10}	=	$55j_1$
j_5	=	$5j_1$	j_{11}	=	$89j_1$
j_6	=	$8j_1$	j_{12}	=	$144j_1$
j_7	=	$13j_1$			

Bei den in dieser Rechnung zutage getretenen Koeffizienten handelt es sich um die bekannte Zahlenfolge von *Fibonacci*[1]), deren Bildungsgesetz durch die folgende für $n = 2; 3; 4; \ldots$ gültige Differenzengleichung angegeben wird:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1}$$

Die Rekursionsverankerung und das allgemeine Glied lauten:

$$F_0 = 0 \quad \text{und} \quad F_1 = 1 \tag{2}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{3}$$

Für die Ströme gilt somit die folgende Beziehung:

$$j_n = F_n j_1 \tag{4}$$

[1]) Leonardo Bigollo Fibonacci, gewöhnlich Leonardo Pisano genannt, wurde um 1179 in Pisa geboren und ist in der ersten Hälfte des dreizehnten Jahrhunderts, wahrscheinlich nach 1240, gestorben.

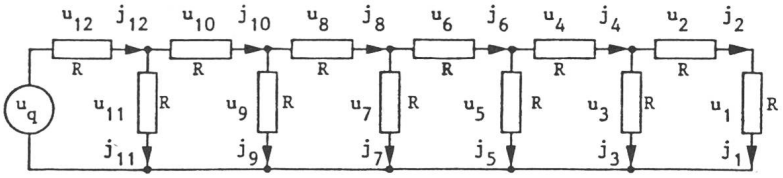

Fig. 1 Einfachste Gamma-zwei-Vierpolkette

Besteht die Vierpolkette aus m Gliedern, d.h. aus $2m$ Elementen, dann gilt:

$$u_q = R(j_{2m} + j_{2m-1}) = Rj_1(F_{2m} + F_{2m-1}) = Rj_1 F_{2m+1}.$$

Dies liefert zwischen der Quellenspannung u_q und der Bezugsgrösse j_1 die Beziehung

$$j_1 = \frac{u_q}{F_{2m+1} R} \tag{5}$$

Die unzähligen Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen können nun auf ihre Brauchbarkeit für elektrische Berechnungen untersucht werden. Zu diesem Zweck werden zwei Beispiele behandelt. Aus der Literatur bekannt sind die Identitäten:

$$F_n^2 + (-1)^n = F_n F_{n-1} + F_{n-1}^2 \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1} \tag{7}$$

Mit (4) und (6) lässt sich eine Formel aufstellen, die die Bestimmung des Stromes j_1 ermöglicht, wenn zwei beliebige unmittelbar aufeinander folgende Ströme z.B. durch Messung bekannt sind.

$$j_1 = \sqrt{(-1)^n (j_n j_{n-1} + j_{n-1}^2 - j_n^2)} \tag{8}$$

Für die gesamte Wirkbelastung P_{tot} des Netzwerkes findet man mit (7)

$$P_{tot} = \sum_{k=1}^{2m} R j_k^2 = j_1^2 R F_{2m} F_{2m+1} \tag{9}$$

Von Interesse ist ferner die Berechnung der Eingangsimpedanz

$$z_e = \frac{u_q}{j_{2m}} = \frac{u_q}{j_1 F_{2m}} = \frac{F_{2m+1}}{F_{2m}} R \tag{10}$$

Strebt m gegen unendlich, dann gilt, wie mit Hilfe von (3) bewiesen werden kann:

$$\lim_{m\to\infty} Z_e = \lim_{m\to\infty} \frac{F_{2m+1}}{F_{2m}} R = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R = 1{,}61803\ldots R \tag{11}$$

3. Berechnung eines Kettenleiters bestehend aus Gamma-zwei-Vierpolen mit unterschiedlichen Längs- und Querimpedanzen

Ein weiterer Schritt in Richtung eines allgemeinen Kettenleiters geht nun dahin, dass Längs- und Querelemente verschieden sind. Sie werden mit R_l und R_q bezeichnet und können sowohl ohmsche Widerstände als auch komplexe Impedanzen darstellen. Es zeigt sich nun, dass es zweckmässiger ist, die Längs- und Querelemente getrennt zu behandeln. Dies bedeutet, dass auch zwei verschiedene Indizes eingeführt werden müssen, und zwar S,n für ein beliebiges Längselement und C,n für ein Querelement. Wie in Fig. 2 angeschrieben, wird im folgenden der Bezugsstrom $j_{C,1}$ mit j_1 und die Bezugsspannung $u_{C,1}$ mit u_1 bezeichnet. Die Berechnung von Strömen und Spannungen zeigt, dass die elektrischen Grössen weitgehend durch das Verhältnis R_l zu R_q bestimmt werden, und dass sich die Einführung eines Leitungsparameters P aufdrängt, der wie folgt definiert wird:

$$P = 2 + R_l / R_q \tag{12}$$

Die Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze ergibt für die Längsströme eine homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung:

$$j_{S,n} = P j_{S,n-1} - j_{S,n-2}$$

$$\text{mit } j_{S,1} = j_1 \text{ und } j_{S,2} = P j_1 \tag{13}$$

Drückt man die Längsströme in Funktion von j_1 und P aus, dann erhält man Polynome in P, die 1959 in etwas abgewandelter Form von *A. M. Morgan-Voyce* definiert wurden [1] und nach ihrem Entdecker den Namen Morgan-Voyce-Polynome erster Art tragen[2]). Sie werden mit B bezeichnet und gehorchen der gleichen Rekursionsformel wie die Ströme in den Längsimpedanzen.

$$B_n = P B_{n-1} - B_{n-2} \tag{14}$$

mit $B_1 = 1$ und $B_2 = P$

Die Längsströme können nun in folgender Weise beschrieben werden:

$$j_{S,n} = B_n j_1 \tag{15}$$

Die Berechnung der Querströme führt auf die gleiche Rekursionsbeziehung; nur die Verankerung weicht von der bisherigen Form ab.

$$j_{C,n} = P j_{C,n-1} - j_{C,n-2} \tag{16}$$

mit $j_{C,1} = j_1$ und $j_{C,2} = (P-1) j_1$

Die Ausführung der eben erstellten Gleichungen führt zu den Morgan-Voyce-Polynomen zweiter Art, die mit b bezeichnet werden und ebenso wie die Polynome erster Art vorteilhaft auf rekursive Art und Weise berechnet werden können.

$$b_n = P b_{n-1} - b_{n-2} \tag{17}$$

mit $b_1 = 1$ und $b_2 = P - 1$

Für die Querströme kann man demnach schreiben:

$$j_{C,n} = b_n j_1 \tag{18}$$

Die Verbindung der Bezugsgrösse j_1 zur Quellenspannung u_q erhält man ebenfalls ohne viel Aufwand.

$$j_1 = \frac{u_q}{R_q b_{m+1}} \tag{19}$$

Auch die Morgan-Voyce-Polynome zeichnen sich durch eine unüberschaubare Vielfalt von Beziehungen aus. Zwei davon lauten:

$$B_{n-1} B_{n+1} = B_n^2 - 1 \tag{20}$$

$$b_n B_{r-h} = B_{n-h} b_r - b_h B_{n-r} \tag{21}$$

[2]) A. M. Morgan-Voyce benutzte eine abweichende Rekursionsverankerung: $B_0 = 1$ und $B_1 = P$

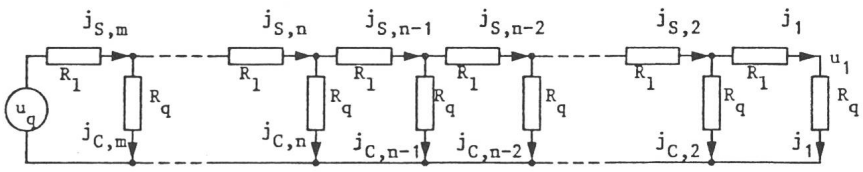

Fig. 2 Allgemeine Gamma-zwei-Vierpolkette

Elektrische Grössen in einer leerlaufenden Gamma-zwei-Kette Tabelle II

a) *Bestimmung des Leitungsparameters P*

$P = 2 + R_l / R_q$

b) *Bestimmung der Polynome von Morgan-Voyce*

Polynome erster Art: $B_n = P B_{n-1} - B_{n-2}$

Verankerung: $B_1 = 1$ und $B_2 = P$

Polynome zweiter Art: $b_n = P b_{n-1} - b_{n-2}$

Verankerung: $b_1 = 1$ und $b_2 = P-1$

c) *Bestimmung der elektrischen Grössen*

Bezugsgrössen: $u_l = \dfrac{u_q}{b_{m+1}}$ und $j_l = \dfrac{u_l}{R_q}$

Längsströme: $j_{S,n} = B_n j_l$

Knotenspannungen: $u_{C,n} = b_n u_l$

Eingangsimpedanz: $Z_e = R_q \dfrac{b_{m+1}}{B_m}$

Elektrische Grössen in einer belasteten Gamma-zwei-Kette Tabelle III

a) *Bestimmung der Polynome von Morgan-Voyce gemäss Tabelle II*

b) *Bestimmung der elektrischen Grössen*

Elektrische Grössen der Belastung Z

$u_z = \dfrac{u_q Z}{R_l B_m + Z b_{m+1}}$ $\qquad j_z = \dfrac{u_z}{Z}$

Längsströme: $j_{S,n} = j_z \left(\dfrac{Z}{R_q} B_n + b_n \right)$

Knotenspannungen: $u_{C,n} = u_z \left(\dfrac{R_l}{Z} B_{n-1} + b_n \right)$

Eingangsimpedanz: $Z_e = R_q \dfrac{R_l B_m + Z b_{m+1}}{Z B_m + R_q b_m}$

Wendet man (15) und (18) auf (20) und (21) an, dann erhält man

$$j_l = \sqrt{j_{S,n}^2 - j_{S,n-1} j_{S,n+1}} \tag{22}$$

$$j_{C,n} j_{S,r-h} = j_{S,n-h} j_{C,r} - j_{C,h} j_{S,n-r} \tag{23}$$

Die Berechnung der elektrischen Eigenschaften eines leerlaufenden Gamma-zwei-Kettenleiters kann nach dem Schema der Tabelle II zusammengefasst werden.

Wird eine Last Z parallel zur Impedanz R_q des Gliedes auf der rechten Seite der Vierpolkette (Fig. 2) geschaltet, dann wird die Berechnung von Strömen, Spannungen und Eingangsimpedanz, falls der Strom in der Last mit j_z und die Spannung über Z mit u_z bezeichnet wird, nach dem Algorithmus der Tabelle III durchgeführt.

4. Die allgemeinen Ausdrücke der Polynome von Morgan-Voyce

In dem Fall, wo P reell ist, können fünf Fälle unterschieden werden:

a) $P > 2$: Mit den Hilfsgrössen

$$\chi = \frac{P + \sqrt{P^2 - 4}}{2} \quad \text{und}$$

$$\chi' = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4}}{2} \quad \text{erhält man:}$$

$$B_n = \frac{\chi^n - \chi'^n}{\chi - \chi'} \quad \text{und}$$

$$b_n = \frac{\chi^{n-0,5} + \chi'^{\,n-0,5}}{\chi^{0,5} + \chi'^{\,0,5}} \tag{24}$$

b) $P = 2$: $B_n = n$ und $b_n = 1$ (25)

c) $-2 < P < 2$:

$$B_n = \frac{\sin[n \arccos(0,5\,P)]}{\sin[\arccos(0,5\,P)]} \quad \text{und}$$

$$b_n = \frac{\cos[(n-0,5)\arccos(0,5\,P)]}{\cos[0,5 \arccos(0,5\,P)]} \tag{26}$$

d) $P = -2$: $B_n = -n(-1)^n$ und

$$b_n = (1-2n)(-1)^n \tag{27}$$

e) $P < -2$: $P_a = |P|$

$$B_n = (-1)^{n+1} \frac{\sinh[n \operatorname{areacosh}(0,5\,P_a)]}{\sinh[\operatorname{areacosh}(0,5\,P_a)]}$$

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{\sinh[(n-0,5)\operatorname{areacosh}(0,5\,P_a)]}{\sinh[0,5 \operatorname{areacosh}(0,5\,P_a)]} \tag{28}$$

5. Rekursive Beziehungen in Ketten von allgemeinen Vierpolen

In einer Kette aus allgemeinen, identischen und passiven Vierpolen (Fig. 3), die durch die Kettenmatrix A

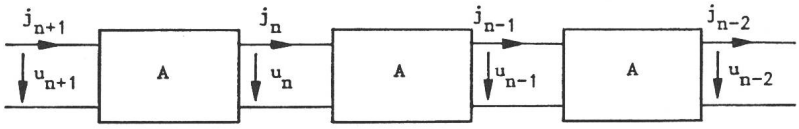

Fig. 3 Allgemeine Kette

Rechenschema im Falle einer unbelasteten allgemeinen Vierpolkette Tabelle IV

a) *Bestimmung des Leitungsparameters P und der Morgan-Voyce-Polynome*

b) *Berechnung der elektrischen Grössen:*

Bezugsspannung: $u_1 = \dfrac{u_q}{a_{11} B_m - B_{m-1}}$

Knotenspannungen: $u_n = u_1(a_{11} B_{n-1} - B_{n-2})$

Längsströme: $j_n = u_1 a_{21} B_{n-1}$

Eingangsimpedanz: $Z_e = \dfrac{a_{11} B_m - B_{m-1}}{a_{21} B_m}$

Rechenschema im Falle einer belasteten allgemeinen Vierpolkette Tabelle V

a) *Bestimmung des Leitungsparameters P und der Morgan-Voyce-Polynome*

b) *Berechnung der elektrischen Grössen:*

Bezugsgrössen: $u_1 = \dfrac{u_q}{(a_{11} + a_{12}/Z) B_m - B_{m-1}}$

$j_1 = \dfrac{u_1}{Z}$

Knotenspannungen: $u_n = u_1[(a_{11} + a_{12}/Z) B_{n-1} - B_{n-2}]$

Längsströme: $j_n = j_1[(a_{21} Z + a_{22}) B_{n-1} - B_{n-2}]$

Eingangsimpedanz: $Z_e = \dfrac{(a_{11} Z + a_{12}) B_m - Z B_{m-1}}{(a_{21} Z + a_{22}) B_m - B_{m-1}}$

gekennzeichnet sind, gelten die nachstehenden rekursiven Gleichungen:

$$u_n = (a_{11} + a_{22}) u_{n-1} - u_{n-2}$$
$$j_n = (a_{11} + a_{22}) j_{n-1} - j_{n-2} \qquad (29)$$

Mit der Identifizierung

$$P = a_{11} + a_{22} \qquad (30)$$

ist die Verbindung zu den Polynomen von Morgan-Voyce hergestellt. Die Berechnung der elektrischen Grössen ist in den Tabellen IV und V zusammengefasst.

6. Anwendungen

6.1. Kettenleiter aus reinen Induktivitäten und Kapazitäten

In der Leitungstheorie spielen Vierpolketten aus Induktivitäten und Kapazitäten eine wichtige Rolle. In Fig. 4 ist ein Ausschnitt eines solchen Kettenleiters dargestellt.

Im Falle einer sinusförmigen Speisespannung wird P kleiner als 2.

$$P = 2 - \omega^2 LC \qquad (31)$$

Ferner sei festgesetzt: $m = 10$; $L = 1$ mH; $C = 1$ µF und $u_q = 1$ V. Die Frequenz f wird so gewählt, dass $P = -1{,}5$ wird, d.h. $f = 9415{,}7$ Hz. Mit den Formeln aus Tabelle II erhält man:

$u_1 = 0{,}366$ V; $j_1 = i \cdot 21{,}67$ mA

und $Z_e = i \cdot 37{,}67\ \Omega$.

Die Knotenspannungen sind in Figur 5 graphisch dargestellt. Die Umhüllende der Knotenspannungen wurde mit (26) ermittelt. Ihr mathematischer Ausdruck lautet:

$$u_{C,n} = 1{,}036 \cos[(n - 0{,}5)\, 2{,}419].$$

Hieraus kann die Periode N der Umhüllenden bestimmt werden; sie beträgt: $N = 2{,}598$ Indexeinheiten.

Die allgemeinen Ausdrücke der Morgan-Voyce-Polynome erlauben auch umfassende theoretische Untersuchungen über das Verhalten von Vierpolketten. Als Beispiel wird eine Analyse über die Resonanzerscheinungen in dem eben berechneten Kettenleiter durchgeführt. Es zeigt sich, dass Resonanzen nur dann auftreten können, wenn P zwischen -2 und 2 liegt. Die Frequenzen, die Resonanz ergeben, erhält man mit:

$$f_k = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{2 - 2\cos\left[\frac{\pi(1+2k)}{1+2m}\right]} \qquad (32)$$

mit $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, (m-1)$

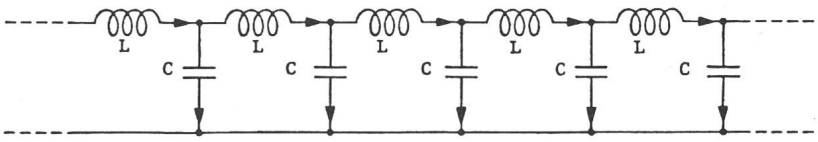

Fig. 4 Vierpolkette, bestehend aus reinen Induktivitäten und Kapazitäten

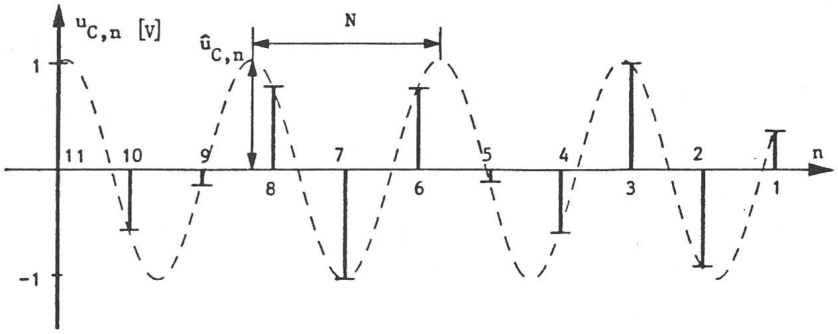

Fig. 5 Grafische Darstellung der Knotenspannungen

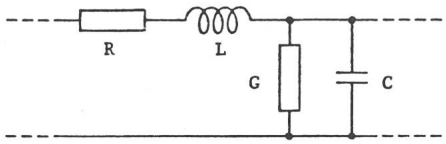

Fig. 6 Vierpol für Leitungssimulation

Demnach tritt in diesem Beispiel dann Resonanz auf, wenn die Quellenspannung eine der folgenden Frequenzen hat: 752, 2240, 3677, 5033, 6276, 7379, 8317, 9069, 9619 oder 9953 Hz. Alle Werte sind auf 1 Hz genau gerundet.

6.2. Verlustbehaftete Kettenleiter

Das Ersatzschema eines Gliedes eines Kettenleiters, der elektrische Leitungen simulieren kann, ist in Figur 6 dargestellt. Für die numerische Behandlung, die nach Tabelle II erfolgt, gelten die Angaben: $R = 3{,}5\ \Omega$; $L = 18{,}3\ \mu H$; $C = 3{,}25$ nF; $G = 0$ S; $m = 10$ und $u_q = 5$ V. Die Ortskurve der Eingangsimpedanz Z_e und der Absolutwert der Ausgangsspannung u_1 wurden für Frequenzen von 30 kHz bis 2 MHz berechnet und in den Figuren 7 und 8 grafisch dargestellt

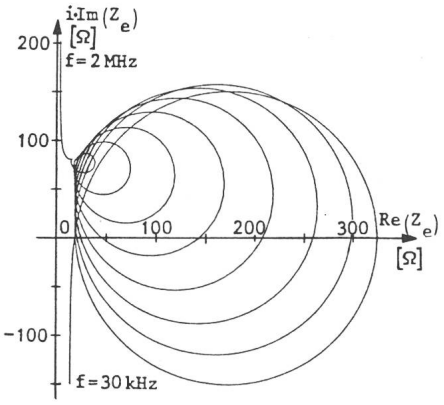

Fig. 7 Ortskurve der Eingangsimpedanz Z_e

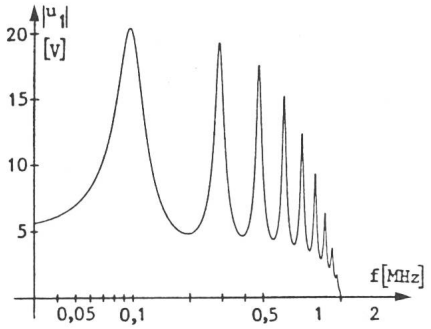

Fig. 8 Logarithmische Darstellung des Absolutwertes der Ausgangsspannung u_1

Literatur

[1] *A.M. Morgan-Voyce:* Ladder network analysis using Fibonacci numbers. I.R.E. Trans. Circuit Theory 6(1959)3, p. 321...322.

[2] *S.L. Basin:* The appearance of Fibonacci numbers and the Q-matrix in electrical network theory. Mathematics Magazine 36(1963)2, p. 86...97.

[3] *M.N.S. Swamy:* Properties of the polynomials defined by Morgan-Voyce. Fibonacci-Quarterly 4(1966)1, p. 73...81.

[4] *M.N.S. Swamy:* Further properties of Morgan-Voyce polynomials. Fibonacci-Quarterly 6(1968)2, p. 167...175.

[5] *J. Lahr:* Theorie elektrischer Leitungen unter Anwendung und Erweiterung der Fibonacci-Funktion. Dissertation der ETH Nr. 6958, Zürich 1981.